

可変精度線の方法に対する並列化効率

Parallel Efficiency of Variable Order Method of Lines

中井 聡, 京工織大大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: nakai@fe.mech.kit.ac.jp

西田 秀利, 京工織大工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: nishida@ipc.kit.ac.jp

里深 信行, 京工織大工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp

Satoshi NAKAI, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Hidetoshi NISHIDA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

In this paper, a variable order method of lines is applied to the direct numerical simulation (DNS) of incompressible homogeneous isotropic turbulence. This method is based on the fractional step approach. The spatial derivatives are discretized by the variable order proper convective scheme and the modified differential quadrature (MDQ) method. The resulting system of ordinary differential equations in time is integrated by the 4th order Runge-Kutta scheme. We can obtain the desirable scalability, as the order of spatial accuracy becomes higher. Then, it is concluded that the present method has the high performance in the parallel computation.

1. 概要

日常一般的な流れはほとんどが乱流であり、乱流の数値解析は工学の分野においても重要な位置を占めている。また、地球流動現象のような実験的手法による流動現象の解明が到底不可能な場合には数値的手法、すなわち数値シミュレーションを行うことにより解析可能である。しかし、地球流動現象のようなスケール比の非常に異なる現象が混在するような複雑な乱流現象を解明するためには、高信頼性・高精度かつ大規模な数値シミュレーションが必要不可欠である。

このような乱流の計算には膨大なメモリ容量と計算時間が必要とされ、これらを極力小さく抑えるため、特に乱流の計算に関しては、“モデル化”と呼ばれる一種の近似解析の方法が用いられている。これらの近似解析を行わず、乱流のダイナミクスを時間及び空間的に捉える数値シミュレーションが直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation : DNS) と呼ばれる手法であり、DNSによって、実験では、到底得難い物理量の収集が可能となると考えられる。

複雑な流動現象を直接数値シミュレーションするには、流動現象を支配する運動方程式を、高次精度で離散化する必要がある。従来は、支配方程式を波数空間に展開して計算を行うスペクトル法¹⁾及び擬スペクトル法²⁾が用いられることが多いが、これらは、基本的に周期性を仮定しているために、汎用性の面で優れているとは言えない。また、スペクトル法は大規模計算となると差分法に比べ、著しく演算量が増大してしまう。従って、本研究では汎用性・計算効率の両面で優れた可変精度線の方法を採用する。可変精度線の方法³⁾は、空間微分項と時間微分項を別個に取り扱う事により次元を減少させ、また、空間微分項の離散化に、1つのパラメータを規定することにより、任意の空間精度が得られる可変精度移流差分法³⁾と修正微分求積法⁴⁾を用いる方法である。

そこで本論文においては、可変精度線の方法を用いて、周期境界条件である非圧縮性三次元一様等方性乱流の大規模DNSを並列計算により可能とし、並列化効率を検討し、計算結果をスペクトル法と比較を行う。尚、並列計算ライブラリーとしてMPI(Message Passing Interface)を採用している。

2. 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式

三次元非圧縮性流れにおいて、ナビエ・ストークス方程式及び連続の式を三次元デカルト座標系 (x, y, z) において、無次元化し、基礎変数表示すると以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = D = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_u - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_v - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_w - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

ここで、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の速度成分であり、 p は、圧力である。また、 F_u, F_v, F_w は、流束項であり、以下のように表される。

$$F_u = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$F_v = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$F_w = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

以上の式は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{\bar{L}_0}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}_0}, \quad z = \frac{\bar{z}}{\bar{L}_0} \\ u &= \frac{\bar{u}}{\bar{U}_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_0}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\bar{U}_0} \\ t &= \bar{t} \frac{\bar{U}_0}{\bar{L}_0}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_0 \bar{U}_0^2} \end{aligned} \quad (8)$$

によって無次元化を行っている。ここで、「 $\bar{\quad}$ 」は有次元量を示し、 \bar{L}_0 は代表長さ、 \bar{U}_0 は代表速度、 $\bar{\rho}_0$ は代表密度、 Re は慣性力と粘性力の比を表す無次元量であるレイノルズ数であり、次のように定義される。

$$Re = \bar{L}_0 \frac{\bar{U}_0}{\bar{\nu}} \quad (9)$$

ここで、 $\bar{\nu}$ は動粘性係数である。

3. 数値計算法

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解法に高次精度線の方法³⁾を用いる。線の方法は空間微分項と時間微分項とを別個に取り扱う方法であり、空間微分項を離散化することにより、時間空間に関する偏微分方程式は、時間に関する連立常微分方程式に帰着される。この時間に関する連立常微分方程式を時間積分することにより、次時間段階の解を得る方法である。

3.1 空間微分項の離散化

式(2), (3), (4)の移流項の離散化には、可変精度移流差分法を適用し、粘性項及び圧力勾配項の離散化には、修正微分求積法(Modified Differential Quadrature Method: 以下MDQ法と略す。)⁴⁾を適用する。

MDQ法は、空間微分を適当に定めた係数と関数自身との線形結合で近似する方法であり、MDQ法によって、例えば、速度成分 u の空間1階及び2階微分項は各々以下のように離散化される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \Phi'_m(\mathbf{x}) u_{i+m,j,k} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \Phi''_m(\mathbf{x}) u_{i+m,j,k} \quad (11)$$

ここで、 M は空間精度を示している。 Φ' , Φ'' は、1階及び2階微分に関する重み係数であり、 Φ は、補助関数 Π を用いると、

$$\Phi_m(\mathbf{x}) = \frac{\Pi(\mathbf{x})}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+m,j,k}) \Pi'(\mathbf{x}_{i+m,j,k})} \quad (12)$$

$$\Pi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-M/2,j,k}) \cdots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,j,k}) \cdots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+M/2,j,k}) \quad (13)$$

と表される。ただし、 Π' は Π の1階微分である。等間隔格子を用いる場合、重み係数は格子数に依存せず、その結果、数値計算の最初に重み係数を求めて、記憶させておけばよく、この場合には係数間には、

$$\Phi'_0 = 0, \quad \Phi'_{-1} = -\Phi'_1, \dots, \quad \Phi'_{-M/2} = -\Phi'_{M/2} \quad (14)$$

$$\Phi''_{-1} = \Phi''_1, \dots, \quad \Phi''_{-M/2} = \Phi''_{M/2} \quad (15)$$

なる関係式が成立するため、計算効率の向上が可能となる。 $M=2$ とした場合、2次精度中心差分と同じ結果が、また、 $M \rightarrow \infty$ の極限においては、フーリエ級数展開と同じ結果が得られる。

一方、可変精度移流差分法は、移流速度方向に半格子ずらした位置で離散化しこれをもとのコロケーション格子上的速度点に補間する方法であり、一般的に以下のように表される。

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^{M/2} c_l \overline{u_j}^{x_j} \frac{\partial_l u_i}{\partial_l x_j} \Big|_{\mathbf{x}}, \quad l' = 2l - 1 \quad (16)$$

ここで M は空間精度を示している。また、式(16)における各オペレータは、以下のように定義される。

$$\overline{f}^{l' x_j} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} (f_{\mathbf{x}_j+l'/2} + f_{\mathbf{x}_j-l'/2}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_j}^{x_j} \Big|_{\mathbf{x}_j \pm l'/2} &= \sum_{m=1}^{M/2} c_m \frac{1}{2} [u_j \Big|_{\mathbf{x}_j \pm (l'+m')/2} + u_j \Big|_{\mathbf{x}_j \pm (l'-m')/2}] \\ &, \quad m' = 2m - 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial_l u_i}{\partial_l x_j} \Big|_{\mathbf{x}_j \pm l'/2} = \frac{\pm 1}{l' \Delta x_j} (u_i \Big|_{\mathbf{x}_j \pm l'} - u_i \Big|_{\mathbf{x}_j}). \quad (19)$$

ここで、 $c_l, c_{m'}$ は重み係数、 Δx_j は、 x_j 方向の格子間隔である。重み係数 $c_l, c_{m'}$ は、MDQ法の一階微分の係数を用いることにより自動的に求めることができる。この方法を用いると、空間精度を示すパラメータ M を変えるだけで、任意精度に対する離散化を行うことができる。

3.2 時間積分法

前述したように空間項を離散化することにより、時間空間に関する偏微分方程式である非圧縮性ナビエ・ストークス方程式は、時間に関する連立常微分方程式に帰着する。この解法には、様々な解法が考えられるが、乱流は非定常であるため、時間精度をも考慮して、4段階4次精度ルンゲ・クッタ法を用いて時間積分する。

3.2.1 4段階4次精度ルンゲ・クッタ法 4段階4次精度ルンゲ・クッタ法は、時間段階が $[n]$ から $[n+1]$ まで進む場合、次の4段階の手順で積分される。

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{u}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{Q}(\mathbf{u}^n)_{i,j} \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(2)} = \mathbf{u}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{(1)})_{i,j} \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(3)} = \mathbf{u}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{(2)})_{i,j} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{u}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{(3)})_{i,j} \quad (23)$$

ここで、 \mathbf{Q} は、空間微分項離散化ベクトルであり、

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad (24)$$

である。

3.2.2 Fractional Step 法 計算手段として、Fractional Step 法⁵⁾を採用する。これは、一時間積分を二段階に分けて計算する方法である。説明を簡単にするために、前進オイラー法によって $[n]$ 時間段階から $[n+1]$ 時間段階まで時間積分するとする。まず、部分段階の速度 \mathbf{u}_i^* をコロケーション格子上で、

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{F}^n \quad (25)$$

によって求める。次に、 \mathbf{u}^* をスタガード位置に補間して、スタガード位置での部分段階速度 $\overline{\mathbf{u}^*}$ を求めると、これによって、スタガード位置での次の時間段階での速度 $\overline{\mathbf{u}^{n+1}}$ は、次式によって与えられる。

$$\overline{\mathbf{u}^{n+1}} = \overline{\mathbf{u}^*} - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (26)$$

式(26)を $[n+1]$ 時間段階における連続の式に代入することにより、以下のような圧力方程式が得られる。

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \overline{\mathbf{u}^*} \quad (27)$$

これを解くことによって、 $[n+1]$ 時間段階の圧力 p^{n+1} を求める。最後に次式によって、 $[n+1]$ 時間段階の速度を決定することができる。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (28)$$

本研究においては、4段階4次精度ルンゲ・クッタ法を時間積分法としているので、この一連の計算方法を、各段階ごとに組み入れることになる。

3.3 圧力方程式の解法

Fractional Step 法を用いると、式 (27) で表される圧力の楕円型方程式を解かねばならない。この楕円型方程式は、セル内の連続の式を満足させるためにできた式で、この解法として、可変精度多重格子法を採用する。式 (27) に、擬似時間項 $\partial p / \partial \tau$ を付加すると、

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \nabla^2 p - \frac{1}{\Delta t} \nabla \bar{\mathbf{u}}^* \quad (29)$$

なる擬似時間 τ 及び空間に関する放物型偏微分方程式に帰着する。従って、式 (29) の擬似時間に関する定常解を求めれば、 $\partial p / \partial \tau = 0$ となり、式 (27) の楕円型方程式の解に一致する。式 (29) は、可変精度線の方法により、解かれる。最密層での空間微分項の離散化に MDQ 法を用いることにより、任意の空間精度を得ることができる。この離散化により、式 (29) は、擬似時間 τ に関する常微分方程式

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{W}(\vec{p}) \quad (30)$$

に帰着する。ここで、式 (30) は、ベクトル表示を用いており、 $\vec{p} = (p_{1,1,1}, \dots, p_{N_x, N_y, N_z})^T$, N_x, N_y, N_z は、x, y, z 方向の格子点数) および \vec{W} は、空間微分項ベクトルである。この常微分方程式の解法には、安定性に優れた有理ルンゲ・クッタ法 (Rational Runge-Kutta Scheme: 以下 RRK 法と略す。) を採用する。RRK 法を式 (30) に適用すると、以下のように表すことができる。

$$\vec{g}_1 = \Delta\tau \vec{W}(\vec{p}^k) \quad (31)$$

$$\vec{g}_2 = \Delta\tau \vec{W}(\vec{p}^k + c_2 \vec{g}_1) \quad (32)$$

$$\vec{p}^{k+1} = \vec{p}^k + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} \quad (33)$$

$$\vec{g}_3 = b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad (34)$$

となる。ここで、演算 (\vec{g}_1, \vec{g}_3) などは、ベクトル \vec{g}_1, \vec{g}_3 の内積を示し、 b_1, b_2 及び c_2 は、RRK 法のパラメータであり、本研究では最も収束性のよいパラメータである $b_1 = 2, b_2 = -1$ 及び $c_2 = 0.5$ を採用している。

さらに、定常解への収束を加速させるために、可変精度多重格子法を組み合わせる。多重格子法は、何層もの格子系を設定し、各々の格子系に対応した誤差の周波数成分を減衰させることにより、単一格子で計算を行うよりも、極めて早く誤差を減衰させることができる解法である。本研究では、全近似記憶型 (Full Approximation Storage: 以下 FAS と略す。) アルゴリズムを採用する。図 (1) に、可変精度多重格子法の計算の流れを示す。図 (1) において、 k は格子レベルを示し、演算子 \mathbf{I}_{k+1}^k 及び \mathbf{I}_{k-1}^k は、各々、密な層から粗い層への制限補間、粗い層から密な層への延長補間を表している。また、 \mathbf{L}^k は、 k レベルの格子系における ∇^2 の差分近似を表す演算子である。

さらに、擬似時間積分に局所擬似時間ステップ法を併用することにより収束加速を図る。この方法は、クーラン数を一定にする事により、局所的に時間刻み幅 $\Delta\tau$ を決定する方法であり、ここでは多重格子の各層でのクーラン数を一定としている。二次元の場合、ある層での格子間隔を $\Delta x, \Delta y$ 、クーラン数を C_N とすると、局所擬似時間ステップ $\Delta\tau$ は 2 次精度の時、

$$\Delta\tau = \frac{C_N \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (35)$$

と与えられる。可変精度多重格子法の流れは図 1 に示すとおりである。

可変精度多重格子法の計算の流れを説明すると、

- (1) 最密格子において、初期条件を与える。
- (2) 式 (29) の空間微分項を MDQ 法を用いて離散化する。

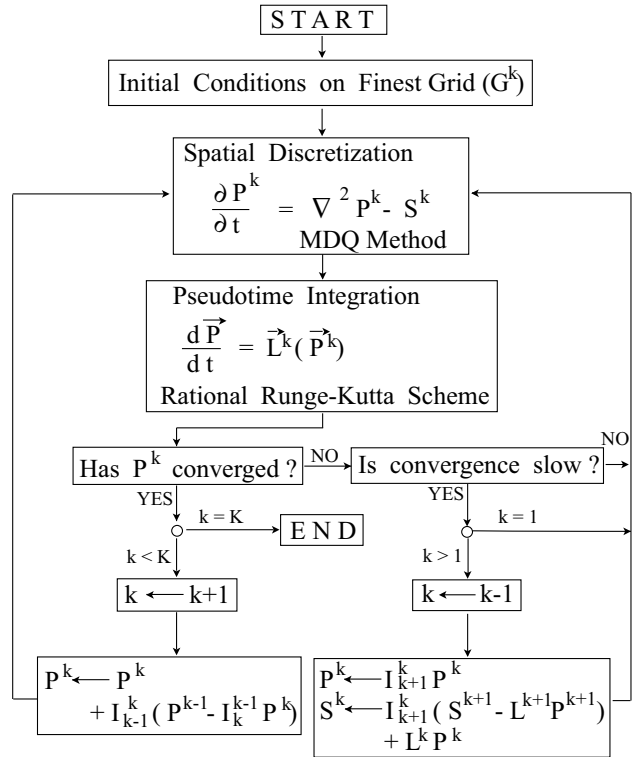


Fig. 1: Variable Order Multigrid Method

(3) 擬似時間に関する連立常微分方程式 (30) を RRK 法を用いて、積分する。
(4) 収束が達成されているかを判断する。その際に、収束判定には、 L_2 残差 R^k を用いる。その格子において、収束が達成されていない場合は、次の関係式によって、収束速度が判定される。

$$R_d = R^m / R^{m-1} > \eta \quad (36)$$

ここで、 R_d 動的残差と呼ばれるものであり、肩文字 $m, m+1$ は、擬似時間レベルを表しており、 η は、その敷居値である。式 (36) を満足している時は、収束速度が遅いことを意味しており、制限補間の計算過程を実行する。

逆に、満足していない時は、収束速度が速いと判断され、(2) のステップに戻り計算を続ける。ただし、粗格子上では、式 (29) の離散化に 2 次精度中心差分を採用する。

一方、その格子において、収束が達成され、しかもその格子が粗格子である場合には、延長補間の計算過程を実行する。最密格子において収束が達成された場合に計算は終了する。

4. 三次元一様等方性乱流の DNS

大規模な直接数値シミュレーションを行うにあたって、1CPU では記憶容量の面から計算が不可能であり、また、計算時間も膨大となる。

並列型コンピュータを使用することによって計算を可能となるが、計算に必要なとされる PE (Processing Element) 数が大きくなると、並列化効率が重要となってくる。そこで、可変精度線の方法の並列化効率を検証し、また、計算結果をスペクトル法と比較する。尚、並列計算ライブラリーとして MPI を用いている。

4.1 計算条件

計算領域は一辺 2π の立方領域とし、境界条件は、流れ場を等方性と仮定しているため、各方向とも周期境界条件とする。

本研究に用いる初期条件は、一様等方性乱流の直接シミュレーションに対して特別に提案されたものであり、この種の計算ではよく用いられる条件⁸⁾である。

まず最初に、速度ベクトル \mathbf{u}_0 の各成分 u_0, v_0, w_0 に対して物理面 $[-0.5, 0.5]$ での一様乱数により初期値を設定する。次にこれらの各成分について、ある相関関係を満足させるために、任意の自己相関スペクトル $C(k)$ を使って、それぞれの変数に相関関係を与える。

本研究では、全ての変数に対する自己相関スペクトルを次式により定義する。

$$C(k) = ak^4 \exp(-bk^2) \quad (37)$$

また、平均を $\langle \rangle$ で表すと、自己相関スペクトルは変数 f について、

$$f_{r.m.s}^2 = \langle f^2 \rangle = \int C(k) dk \quad (38)$$

なる関係が成り立つ。

次にそれぞれの変数が必要なスペクトルを満足させるための操作を u_0 を用いて説明する。まず、波数空間 (k_1, k_2, k_3) に対して円形の殻を決定し、 k 番目の殻を

$$(k-1/2 < k' < k+1/2), \quad k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (39)$$

によって定義する。ただし、全ての殻は単位幅とする。また、 k 番目の殻の u_0 の自己相関スペクトル $C_u(k)$ を

$$C_u(k) = \sum_{k-1/2 < k' < k+1/2} |\hat{u}_0(k_1, k_2, k_3)|^2 \quad (40)$$

のように定義する。よって、 u_0 が必要なスペクトル分布を得るためにスケール変換を行い、物理面へ逆変換することにより分布を与える。

$$\hat{u}_0(k_1, k_2, k_3) \rightarrow \hat{u}_0(k_1, k_2, k_3) \sqrt{\frac{C(k)}{C_u(k)}} \quad (41)$$

5. 計算結果

本研究においては、 $128 \times 128 \times 128$ 、 $256 \times 256 \times 256$ 、及び、 $512 \times 512 \times 512$ の等間隔デカルト格子を用い、最大波数 k_{max} とコロモゴロフ長 η の関係が $k_{max}\eta = 2.0$ となるように各計算パラメータを与えており、表1に示す通りである。

Tab. 1: Parameters

N	128	256	512
ν	5.0×10^{-3}	1.8×10^{-3}	7.6×10^{-4}
Δt	0.005	0.001	0.001
Re	200.00	555.56	1315.79

なお、本研究では筑波大学計算物理学研究センター小規模並列計算機 PILOT-3(主記憶 256MByte, 128PU)・京都大学ベクトル並列計算機 VPP800/63・日本原子力研究所超並列計算機 SSCMPP を使用している。

5.1 格子点数 128^3

一辺の格子点数を 128 として計算を行った結果について、本スキームの並列化効率を調べると共に、スペクトル法により得られた結果との比較を行う。

この計算に関する各空間差分精度における並列化効率を図2に示す。尚、並列化効率は PILOT-3 において時間

計測した結果である。並列効率の評価には次に示す式による加速率 S_p を用いることとする。

$$S_p = \frac{T(U)}{T(P)} \quad (42)$$

ここで、 U は、基本対象とするプロセッサ数であり、 P は、計算に使用するプロセッサの総数とする。ここでは、4PEs を基準とした加速率を示している。また、図2～図3内の表記 $\langle l, m, n \rangle$ は、並列計算する際の領域分割方法を示しており、 l, m, n はそれぞれ x 方向、 y 方向、 z 方向の領域分割数である。

本スキームでは、楕円型圧力方程式の反復計算に収束を促進させるため多重格子法を使用しているが、各計算領域の境界及び多重格子の各階層間の延長補間・制限補間のデータ通信量が多く、そのことは計算時間及び並列計算効率を悪化させ、大規模計算を行うにあたってネックとなる。そこで、差分及び階層間の補間に必要な隣り合う領域のデータをあらかじめ計算領域に袖部を設けて保管しておくことによって、通信回数を減らす最適化をすることによって、計算の高速化及び並列計算の効率化を向上させることが出来た。

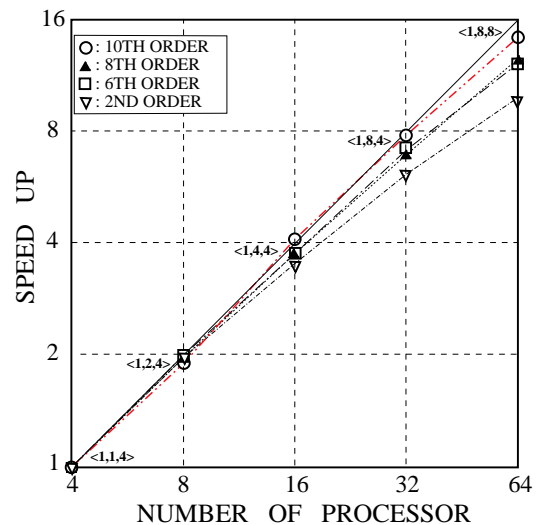


Fig. 2: Speed Up Ratio

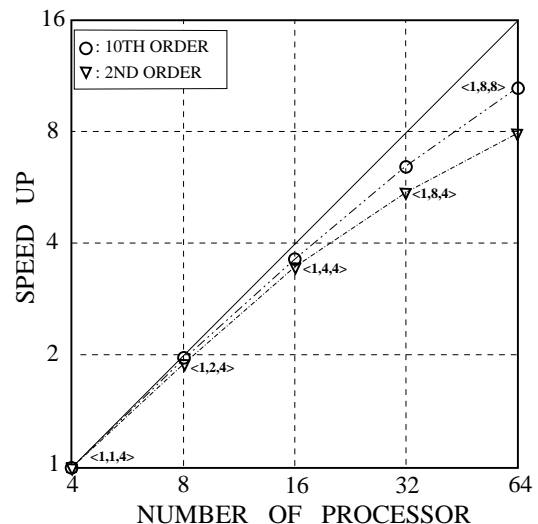


Fig. 3: Poisson Solver Speed Up Ratio

計算領域間のデータ通信量が多く必要とされる 10 次精度差分では、使用 PE 数が増加すると通信時間の占め

る割合が大きくなり、並列効率が悪化すると思われたが、PE 数に比例する理想的な並列効率に十分に近い結果を得た。逆に精度が低い時の方が並列効率が悪くなっている。ポアソン方程式を解いている部分の並列効率を図3に示す。

2次精度の並列化効率がPE数が多くなると極端に悪くなっていることがわかる。これは、ポアソン方程式を解く部分において、演算量が少なくなり、通信量が多いため並列効率が悪化する上、さらに、表2に示す様に全体の計算時間に対する並列効率の悪い部分の占める割合が高くなることが原因であると考えられる。

Tab. 2: Ratio of CPUtime for Poisson solver

	4PE	64PE
2nd order	0.7559	0.8488
10th order	0.3363	0.4603

5.2 格子点数 256³

ここでは、格子点数を一辺 256 点とした場合の計算結果についてスペクトル法により得られた計算解との比較を行う。各空間差分精度における $t = 4.0$ でのエンストロフィーの等値面を図4~図7に、各乱流統計量の時間変化を図8~図12に示す。ただし等値面は一辺の長さが1/2、一方向格子点が128の部分を対象としている。

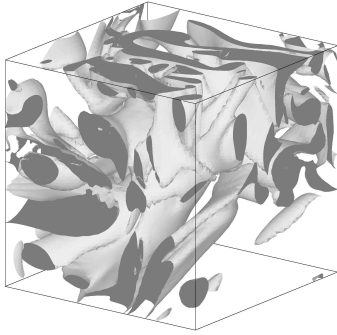


Fig. 4: Enstrophy (10th order)

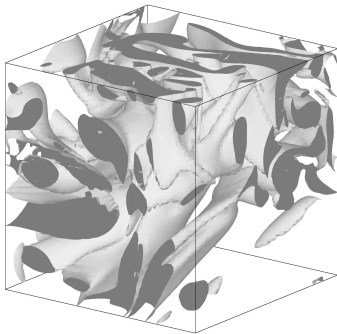


Fig. 5: Enstrophy (8th order)

続いて乱流統計量の時間変化を各空間差分精度及びスペクトル法を比較する。ここでは、

$$\langle A_{ijk} \rangle = \frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k=1}^N A_{i,j,k}$$

を用いて以下の統計量をとる事とする。

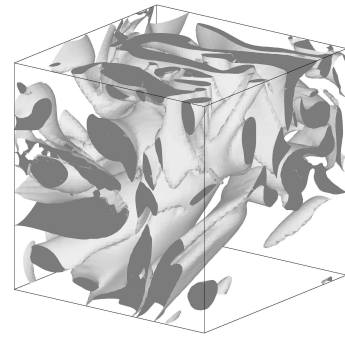


Fig. 6: Enstrophy (6th order)

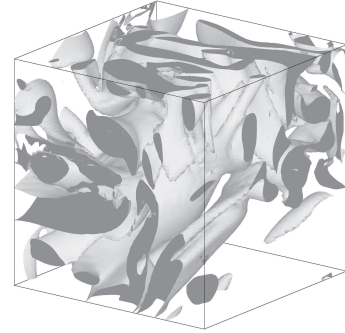


Fig. 7: Enstrophy (4th order)

1. 平均エネルギー E
 $E = \langle u_i^2/2 \rangle, (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$
2. エネルギー散逸率 ϵ_2
 $\epsilon_2 = -\nu \langle u_i \partial_j^2 u_i \rangle$
3. エンストロフィー Ω_2
 $\Omega_2 = \epsilon_2 / (2\nu)$
4. skewness
 $skewness = -2 \langle \omega_i s_{ij} \omega_j \rangle / [35 \{ \epsilon_2 / (15\nu) \}^{3/2}]$
5. エンストロフィー散逸率 P_2
 $P_2 = -\nu \langle \omega_i \partial_j^2 \omega_i \rangle$

エネルギー・エネルギー散逸率・エンストロフィーに関しては、どの精度においてもスペクトル法の結果と一致している。しかし、エンストロフィー散逸率は差分精度が落ちるに従ってピーク値が小さくなり、スペクトル法の結果との差異が大きくなっていることがわかる。

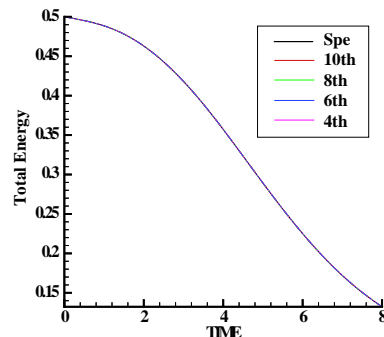


Fig. 8: Total Energy

5.3 格子点数 512^3

ここでは、一辺の格子点数を一辺 512 点とした場合の計算結果についてまとめる。空間 8 次精度で計算した場合のエンストロフィーの等値面の一部（一辺の長さが 1/4、一方向格子点が 128）を図 13 に、乱流統計量の時間変化を図 14・図 15 に示す。

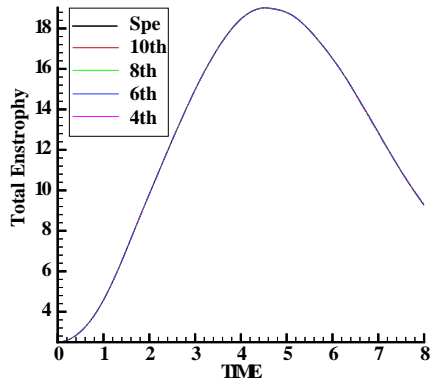


Fig. 9: Total Enstrophy

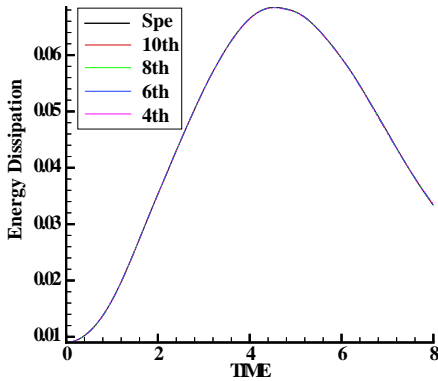


Fig. 10: Energy Dissipation

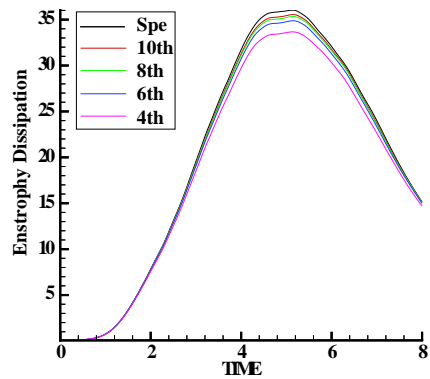


Fig. 11: Enstrophy Dissipation

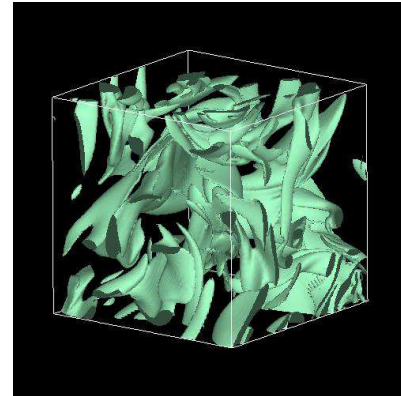


Fig. 13: Enstrophy (t=1.0)

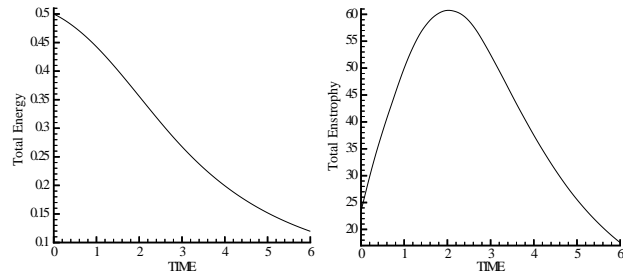


Fig. 14: Total Energy and Total Enstrophy

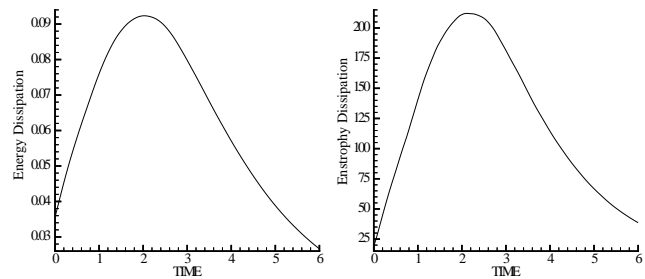


Fig. 15: Energy Dissipation and Enstrophy Dissipation

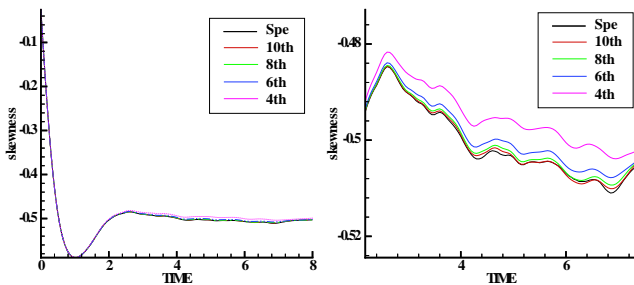


Fig. 12: Skewness

6. 結論

本報告では、三次元一様等方性乱流の数値計算するためにコードの並列化を行い、その効率を検討した。その結果次のような結論を得た。

- (1) 可変精度線の方法は演算量の多い高次精度ほど理想的な並列効率に近づくと見え、本スキームは大規模シミュレーションに適していることが確認された。
- (2) 空間精度が 6 次以上となると、スペクトル法による結果と比較しても十分に良好な結果を得ることができた。

参考文献

1. S.A.Orszag, Turbulence and Transition : A Progress Report, Lecture Notes in Physics, Vol.59, pp.32-51 (1976), Springer Verlag.
2. S.A.Orszag, Comparison of Pseudo spectral and Spectral approximation, Studies in Applied Mathematics, Vol.51, No.3 , pp.253-259 (1972).
3. H.Nishida, Variable Order Method of Lines for Solving the Primitive Variables Incompressible Navier-Stokes Equations, Proc. 6th Japan-Russia Joint Symp. on CFD, pp.140-143 (1998).
4. N.Satofuka, K.Morinishi, and H.Nishida, Numerical Solutions of the Vlasov Equation, Institute of Plasma Physics Research Report, IPPJ-725, pp.11-24 (1985).
5. C.H.Rhie and W.L.Chow, Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, AIAA Journal, Vol.21, No.11, pp.1525-1532 (1983).