

# MPD 推進機内の軸対称粘性流れの数値解析

## Numerical Investigation of Axisymmetric Viscous Flows in MPD thrusters

武田大徳, 東北大院, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉, E-mail: takeda@caero.mech.tohoku.ac.jp  
 山本 悟, 東北大工, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉, E-mail: yamamoto@caero.mech.tohoku.ac.jp  
 Hironori TAKEDA, Dept. of Aeronautics & Space Eng., Tohoku Univ., Sendai 980-8579, JAPAN  
 Satoru YAMAMOTO, Dept. of Aeronautics & Space Eng., Tohoku Univ., Sendai 980-8579, JAPAN

Axisymmetric viscous flows in magneto-plasma dynamic (MPD) thrusters are investigated by using an implicit time-marching method based on the LU-SGS scheme. In the previous study, the ionization rate was considered on the assumption that electron temperature is in equilibrium with that of heavy particles, but the calculated temperatures are overestimated. In this paper, non-equilibrium between electron and heavy particles temperature is taken into consideration, and energy transfer from electron to heavy particles are calculated strictly. So the axisymmetric compressible Navier-Stokes equations with Lorentz force and Joule heating, the equation of magnetic induction, the continuity equation of electron, and the conservation equation of heavy particle thermal energy are simultaneously solved using the present time-marching method, and the calculated results are compared with experiments.

### 1. 緒言

MPD 推進機は静止衛星や宇宙空間航行の推進機等を目的に開発されている電気推進機のひとつで、その加速原理は、放電電流とその電流自身によって誘起される周方向磁場  $B_\theta$  との相互作用であるローレンツ力によって推進剤を加速させる。MPD 推進機内の流れを解析するためには、流れ場の Navier-Stokes 方程式と、Maxwell 方程式と Ohm の法則から導かれる磁場の誘導方程式を解かなければならない。軸対称系の誘導方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{R_m \sigma} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{u_r \psi}{r} \quad (1)$$

ただし、 $\psi = rB_\theta$  であり、 $\sigma$  は無次元化された電気伝導度である。これに含まれる磁気レイノルズ数  $R_m$  は流れ場のレイノルズ数  $Re$  に比べて非常に小さいので、既存の多くの方法ではこれをポアソン方程式とみなし SOR 法などの反復法で解き、そこで得られた電磁場の物理量と、流れの方程式を時間進行法で解き、得られた物理量を交換し合いながら交互に解く方法が用いられている。しかし、このような方法は効率ではなく、厳密でない。そこで、LU-SGS 法に基づく高効率陰的差分スキームを用いて流体の方程式と誘導方程式を同時に解く方法が完全電離を仮定した流れ場<sup>1</sup>、重粒子(イオン、中性粒子)と電子が熱平衡状態(1温度モデル)にあると仮定して電離を考慮した流れ場<sup>2</sup>に適用された。しかし、本来重粒子と電子の温度は異なるため、本論文では新たに重粒子と電子の熱非平衡性(2温度モデル)を考慮し、計算結果と実験結果を比較し本解法の妥当性を示す。

- $B$  : 磁束密度
- $\bar{C}_s$  : 粒子  $s$  の平均熱速度 ( $= \sqrt{8kT_s / \pi m_s}$ )
- $E$  : 電界ベクトル
- $E_s$  : 粒子  $s$  の単位体積当りのエネルギー
- $I$  : 印加電流
- $j$  : 電流密度ベクトル
- $k$  : ボルツマン定数
- $M_{Ar}$  : アルゴンの分子量

- $\dot{m}$  : 質量流量
  - $m_s$  : 粒子  $s$  の 1 個当たりの質量
  - $n_s$  : 粒子  $s$  の数密度
  - $p$  : 静圧
  - $R$  : 気体定数
  - $Re$  : レイノルズ数
  - $R_m$  : 磁気レイノルズ数 ( $= \sigma_{in} \mu_0 V_{in} r_c$ )
  - $r, z$  : 半径方向、軸方向座標
  - $q_j$  : 熱流束
  - $T_s$  : 粒子  $s$  の温度
  - $t$  : 時間
  - $u$  : 半径方向、軸方向速度
  - $\varepsilon_i$  : アルゴンのイオン化エネルギー
  - $\gamma$  : 比熱比
  - $\kappa_s$  : 粒子  $s$  の熱伝導率
  - $\mu_0$  : 真空の透磁率
  - $\mu$  : 粘性係数
  - $V_{sr}$  : 粒子  $s$  と粒子  $r$  の衝突頻度
  - $\rho_s$  : 粒子  $s$  の密度
  - $\sigma$  : 電気伝導度
  - $\tau_{ij}$  : 粘性応力テンソル
  - $\omega_e$  : 電子の生成率
  - $\psi$  : 磁場流線 ( $= rB_\theta$ )
- 添え字
- $h$  : 重粒子
  - $e$  : 電子

### 2. 支配方程式

本研究では、MPD 推進機内部流れを解く上で、流れ場は軸対称、磁場は周方向の自己誘起磁場のみ、プラズマは局所的に電気的中性と仮定する。解くべき方程式は、ローレンツ力ならびにジュール加熱が付加された軸対称圧縮性ナビ

エ・ストークス方程式、電子の連続式、重粒子熱エネルギー式、誘導方程式の7式で、式(1)～(6)に示す。

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + \frac{\rho u_r}{r} = 0 \quad (2)$$

運動量の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) + \frac{\rho u_j u_r}{r} \\ = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\tau_{jr}}{r} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3)$$

全エネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((E+p)u_j) + \frac{(E+p)u_r}{r} \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}u_i + q_j) + \frac{\tau_{jr}u_r + q_r}{r} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4)$$

電子の連続の式

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial \rho_e u_j}{\partial x_j} + \frac{\rho_e u_r}{r} = \omega_e \quad (5)$$

重粒子熱エネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (E_h u_j) + p_h \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{(E_h + p_h)u_r}{r} \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}u_i - q_{hj}) + \frac{\tau_{jr}u_r + q_{hr}}{r} + Q_{T-e} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、

$$E = \frac{p_h + p_e}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + n_e \varepsilon_i \quad E_h = \frac{p_h}{\gamma - 1} \quad (7)$$

粘性応力テンソル  $\tau_{ij}$  ならびに熱流束  $q_j$  は

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] \quad (8)$$

$$q_j = -\kappa_h \frac{\partial T_h}{\partial x_j} - \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x_j}$$

上記の粘性係数  $\mu$  と重粒子と電子の熱伝導率  $\kappa_h, \kappa_e$  は以下のように定義される<sup>3</sup>。

$$\mu = \frac{m_h \bar{C}_h}{2\sqrt{2}} \sum_{s \neq e} \frac{n_s}{\sum_{r \neq e} n_s Q_{sr}} \quad (9)$$

$$\kappa_h = \frac{15k\bar{C}_h}{8\sqrt{2}} \sum_{s \neq e} \frac{n_s}{\sum_{r \neq e} n_s Q_{sr}} \quad (10)$$

$$\kappa_e = \frac{15k\bar{C}_e}{8\sqrt{2}} \frac{n_e}{n_e Q_{ee} + \sqrt{2} \sum_{r \neq e} n_s Q_{sr}} \quad (11)$$

また、 $\omega_e, Q_{T-e}$  は電子の生成率、並進-電子交換エネルギーで、以下のように与えられる<sup>3</sup>。

$$\omega_e = m_e \alpha(T) [S_a n^{(k)} - n_e n^{(k+1)}] \quad (12)$$

$$Q_{T-e} = 3R \frac{\rho_e}{M_{Ar}} (T_e - T_h) (v_{ei} + v_{en}) \quad (13)$$

ただし、上式の  $\alpha(T)$  は Hinnov - Hirschberg の式を、 $S_a$  は Saha の平衡式を用い、 $v_{er}$  は衝突頻度、本研究ではアルゴンガスの3価電離まで考慮した。

### 3. 数値解法

本解法では、LU - SGS 法ならびに対角化点陰解法に基づく陰的時間進行法を適用して流れの基礎方程式と誘導方程式を同時に連立して解く。それらを効率よく計算するために、定常計算を仮定した上で LU - SGS 法におけるスペクトル半径の部分に拡散を考慮した項を付加する<sup>1</sup>。流れ場の流束ベクトルの差分には、3次精度 MUSCL TVD<sup>4</sup>スキームにより高次精度補間された修正流束分離法を用い、拡散項の微分には2次中心差分を用いた。

### 4. 計算結果

実験で解析された Fig.1 に示す形状<sup>5</sup>において推進剤はアルゴンガスの場合の計算を行った。流入境界条件として、超音速流入とし、質量流量  $\dot{m} = 1.37(\text{g/s})$ 、1温度モデルでは  $T = 1 \times 10^4(\text{K})$ 、2温度モデルでは重粒子温度  $T_h = 3 \times 10^3(\text{K})$ 、電子温度  $T_e = 1 \times 10^4(\text{K})$  に固定した。また、入口の電離度は電子の温度を用いて Saha の平衡式から求めた。流出境界では超音速流出を仮定し、壁面は断熱壁、速度場に関してはすべりなしとする。電磁場の境界条件として、磁場流線 ( $= rB$ ) の境界条件は流入口と絶縁体部で  $\psi = -\mu_0 I / 2\pi$ 、出口と対称軸上で  $\psi = 0$  である。

まず、Fig.2 に印加電流  $I = 5\text{kA}$  の場合の電流分布を示す。(a)実験結果<sup>4</sup>、(b)完全電離を仮定した場合、(c)1温度モデル、(d)2温度モデルの計算結果である。(b)の場合、入口で十分大きい電気伝導度を与えているため、電流分布が入口側に偏っているが、(c)と(d)では電気伝導度が高くなる下流側にずれているのがわかる。しかし、(c)では等高線が陰極の中間点ほどに密集しているだけでなく、陽極付近の分布が実験と大きく異なる結果になった。それに対して、(d)では等高線が実験と同様にほぼ等間隔で分布している。以上の結果から、今回新たに熱非平衡性を導入した(d)が最も妥当な計算結果であると言える。

次に Fig.3 に温度分布を示す。(a)1温度モデル、(b)と(c)はそれぞれ2温度モデルの重粒子温度、電子温度である。1温度モデルと2温度モデルでは陰極付近の温度値に大きな違いは見られなかったが、前者の方がより下流まで高温領域が広がっているのがわかる。また、2温度モデルでは流入口で電子と重粒子の温度差を与えているため、入口から陰極先端付近の高温領域に入るまでの領域で温度分布が複雑になった。実験では分光器を用いて陰極先端より下流側の電子温度を測定している。その実験結果は全域でほぼ均一で約  $2 \times 10^4 \text{K}$  になっている。しかし、計算結果は対称軸からの径方向距離  $r = 0\text{mm}$  で実験値の約2倍、 $r = 5\text{mm}$  で約1.3倍、 $r = 10\text{mm}$  で約1.2倍大きい値となった。実験値との違いの原因として、電離度を0にすると電離が起こらないなどの理由から初期条件や流入条件で  $1 \times 10^4 \text{K}$  と高温に設定していること、電子の挙動を電子の連続式で解いていることなどが考えられる。

Fig.4 には印加電流  $I = 5\text{kA}$  の場合の(a)1温度モデルと(b)2温度モデルの軸方向速度成分を示す。この図からわかるよう

に分布は大きく異なっており、Fig.2 に示す電流分布などの違いが影響していると言える。

### 5 . 結言

新たに重粒子と電子の熱非平衡性を考慮したMPD推進機内の流れを数値解析した。1温度モデルに比べて、温度分布に大きな違いは見られなかったが、電流分布は改善された。また、両モデルとも実験で測定された電子温度と一致しなかった。今後の課題として、その実験値との誤差の原因についてさらに検証する必要があると考えられる。

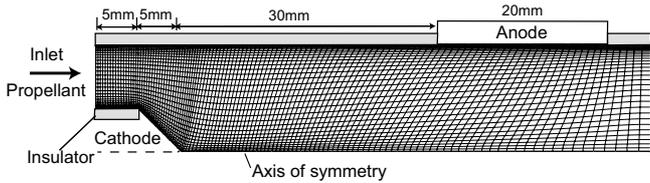
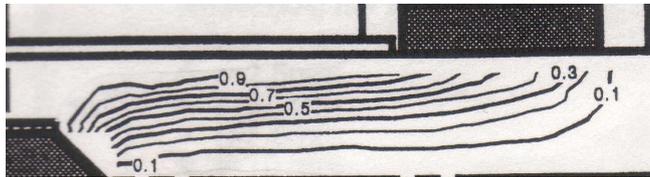
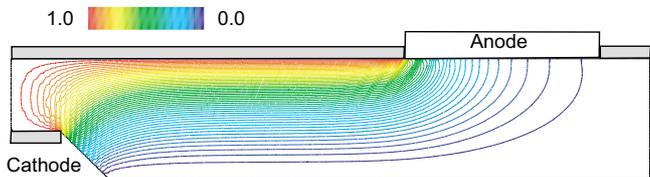


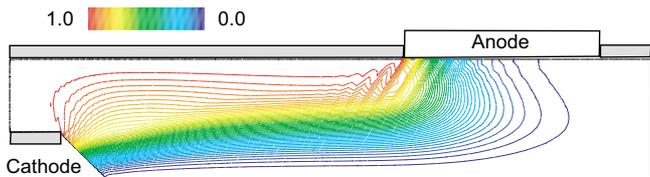
Fig.1 Schematic of the MPD thruster



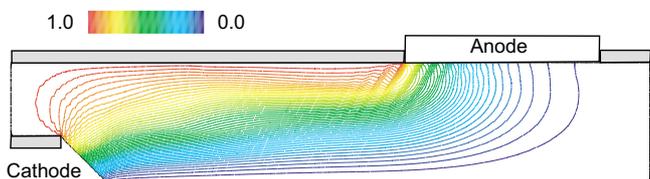
(a) Experiment



(b) Fully ionized

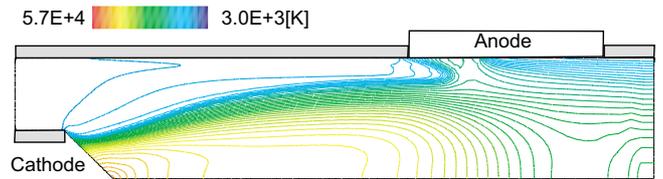


(c) Equilibrium

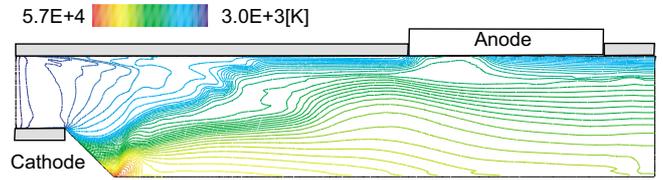


(d) Non-equilibrium

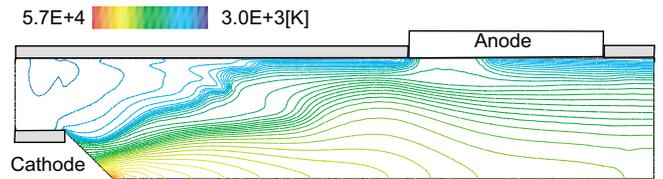
Fig.2 Current contour lines (I=5kA)



(a) Equilibrium

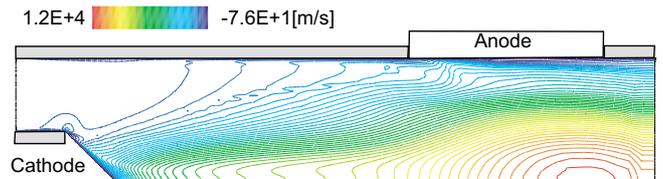


(b) Heavy particles temperature

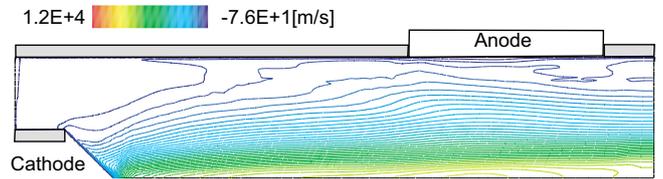


(c) Electron temperature

Fig.3 Temperature distributions (I=5kA)



(a) Equilibrium



(b) Non-equilibrium

Fig.4 Axial velocity distributions (I=5kA)

### 参考文献

- 1 山本悟, 千葉史人, 日本機械学会論文集(B編)66巻, 643号(2000.3).
- 2 Takeda, H. and Yamamoto, S., Trans. JSASS, Vol.44, No.146 (2002), to be appear.
- 3 M.Mitchner and C.Kruger, Partially Ionized Gases, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- 4 Yamamoto, S. and Daiguji, H., AIAA Paper 92-3044, (1992).
- 5 満尾和徳, 田原弘一他3名, 日本航空宇宙学会論文集, 48巻, 555号(2000.4).