

## 解適合格子法を用いたMHD衝撃波解析

### Numerical Simulation of MHD Shock Wave with an Adapted Grid Refinement Technique

原 由一, 慶應義塾大学大学院, 〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: hara@tana.mech.keio.ac.jp  
 棚橋 隆彦, 慶應義塾大学, 〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: taka@mech.keio.ac.jp  
 Yoshikazu Hara, Keio University, Hiyoshi 3-14-1 Kohoku-ku Yokohama-shi  
 Takahiko Tanahashi, Keio University, Hiyoshi 3-14-1 Kohoku-ku Yokohama-shi

This paper presents a computational scheme for compressible ideal MHD (magnetohydrodynamics) equations. The scheme utilizes the finite volume approach with an adapted grid refinement technique. The second order accuracy of the scheme in space and time is ensured by a MUSCL-type method and an explicit Runge-Kutta scheme for the time discretization. Computational results are presented for a MHD shock tube and for a supermagnetosonic flow in a channel.

#### 1. 緒言

プラズマの一流体モデルとして磁場とプラズマの相互作用等の巨視的な振る舞いを近似する電磁流体方程式(MHD方程式)において、変位電流、静電気力、および粘性、抵抗、熱伝導の効果を無視すると理想MHD方程式(ideal MHD equations)が得られる。

電磁流体では磁気音波やアルフベン波などいくつかの波動が存在しその挙動は一般に複雑である。計算負荷も気体力学(gas dynamics)の場合に比べ大きくなる。また、超音速で進む高速プラズマ流では衝撃波(MHD shock)が形成されるため、局所的な格子配置をすることで高解像度の解を得る必要がある。そこで本手法では気体力学の衝撃波解析で成功を収めてきた解適合格子法を理想MHD方程式に適用し、MUSCL法を用いて高次精度化することで、MHD衝撃波を効率よく高解像度に捕らえることを目指す。

#### 2. 支配方程式

支配方程式は理想MHD方程式である。理想MHD方程式は電気伝導度が無限の理想プラズマを記述する方程式で、連続の式、運動量方程式、磁場の誘導方程式、およびエネルギー方程式からなる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{I} \left( p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \left( E + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

$\rho$  は理想プラズマの密度、 $p$  は圧力、 $\mathbf{u}$  は速度、 $\mathbf{B}$  は磁束密度、 $E$  はエネルギーを表している。 $\mathbf{I}$  は単位テンソル、 $\mu_0$  は真空の透磁率である。エネルギーは具体的に(2.2)のよう表すことができる。

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \quad (2.2)$$

は比熱比である。通常は(2.1)に磁場の発散条件(2.3)を加えたものを理想MHD方程式とみなす。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

上流の圧力  $p_\infty$ 、音速  $a_\infty$ 、および真空の透磁率  $\mu_0$ 、代表長さ  $d$  を用い(2.4)で定義される無次元量を用いると(2.1)~(2.3)は(2.5)~(2.7)のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= a_\infty t / d \\ \tilde{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} / d \\ \tilde{p} &= p / p_\infty \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} / a_\infty \\ \tilde{\rho} &= \rho / (\rho_\infty / a_\infty^2) \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{B} / \sqrt{\mu_0 p_\infty} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} + \tilde{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{I} \left( \tilde{p} + \frac{\tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}}{2} \right) - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} \\ \left( \tilde{E} + \tilde{p} + \frac{\tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}}{2} \right) \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} + \tilde{\rho} \frac{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{2} + \frac{\tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}}{2} \quad (2.6)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.7)$$

方程式中に真空の透磁率が現れなくなるのみで(2.1)~(2.3)と式の形は変わらない。以後は無次元量に対する上付き添え字は省略するものとする。

#### 3. 有限体積法による支配方程式の定式化

(2.5)を保存量ベクトル  $\mathbf{U}$  および流束ベクトル  $\mathbf{F}$  を用いて書き換えると(3.1)になる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{I} \left( p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \left( E + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

(3.1)を各セルについて積分しガウスの発散定理を用いて第2項を書き換えると(3.2)になる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \mathbf{U} dS + \int_{\partial \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (3.2)$$

ここで $\Omega$ はセルの面積、 $\partial \Omega$ はセル境界、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル、 $dl$ はセル境界の長さをそれぞれ表している。

(3.2)をセル中心で平均化された保存量 $\bar{U}$ および数値流束ベクトル $\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ を用いて書き直すと(3.3)になる。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \Omega + \int_{\partial \Omega} \Phi dl = 0 \quad (3.3)$$

Fig. 3.1を参照して $K$ を着目セル、 $K_e$ をセル境界 $e$ について $K$ に隣接しているセル、 $\mathbf{n}_{e,k}$ を $K$ から $K_e$ に向かう単位法線ベクトル、 $t^n = n\Delta t$ として(3.3)を離散化すると

$$\bar{U}_K^{n+1} = \bar{U}_K^n - \frac{\Delta t}{\Omega_K} \sum_{e \in \partial K} \Phi(\bar{U}_K^n, \bar{U}_{K_e}^n, \mathbf{n}_{e,K}) |e| \quad (3.4)$$

となる。ここで $\kappa$ はセル $K$ の面積、 $|e|$ はセル境界 $e$ の長さ、 $\Phi(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{K_e}, \mathbf{n})$ は $\mathbf{n}$ 方向の数値流束を表している。

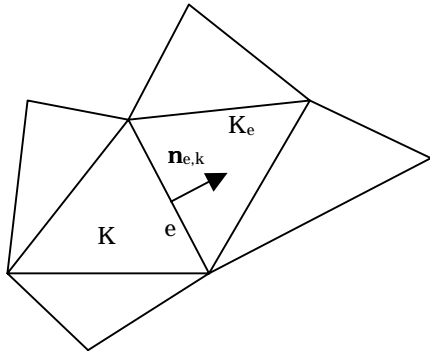


Fig. 3.1 Part of 2D triangulation

セル境界での流束の評価にROE法を用いる場合は、(3.4)における法線方向の数値流束は

$$\begin{aligned} \Phi_n^{RoE}(K, K_e) &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(K) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(K_e) \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} |A_n^{RoE}(K, K_e)| [U(K_e) - U(K)] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(K) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(K_e) \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 \eta_{\lambda_k} |\lambda_k| R_{\lambda_k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。 $A_n^{RoE}$ は流束ヤコビアン行列であり $\lambda_k$ はその固有値、 $R_{\lambda_k}$ は右固有ベクトル、 $\eta_{\lambda_k}$ は波の強さで左固有ベクトルを用いて $\eta_{\lambda_k} = L_{\lambda_k}(\mathbf{U}(K_e) - \mathbf{U}(K))$ で表される。固有値は7種類あり具体的に表示すると<sup>(1)(2)</sup>

$$u_n - c_f, u_n - c_a, u_n - c_s, u_n, u_n + c_s, u_n + c_a, u_n + c_f$$

$$c_a = B_n / \sqrt{\rho}$$

$$c_{f,s} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_n^2}{\rho^2}} \right)} \quad (3.6)$$

ここで $c_a$ はアルフベン波の速度、 $c_{f,s}$ はそれぞれ速い磁気音波、遅い磁気音波の速度である。

#### 4. 高次精度化

セル内での保存量分布を線形と仮定し、MUSCL法を用いて空間精度を向上させる。このとき要素 $i$ 内での保存量は

$$U_i(x, y) = U_i^{center} + \nabla U_i \cdot \mathbf{dr} \quad (4.1)$$

と表すことができる。これをデータの再構築という。

$U_i^{center}$ は要素中心での保存量の値、 $\nabla U_i$ は要素内での保存量の勾配で、 $\mathbf{dr}$ はセル中心を基準としたときの要素 $i$ 内の任意の点の位置座標である。要素 $i$ 内での保存量の勾配は

$$\nabla U_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\partial \Omega} \hat{U} \mathbf{n} dl \quad (4.2)$$

により求められるが、線積分を行う経路のちがいにより種々の評価方法がある。本研究ではFig. 4.1のような要素境界を線積分の経路とする方法を採用する。また、要素境界での保存量の値は境界をまたぐ左右の保存量の算術平均を用いることにする。最終的に要素内での保存量の勾配は

$$\nabla U_i = \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} (U_i + U_k) \mathbf{n}_j \Delta l_j \quad (4.3)$$

により求めることができる。

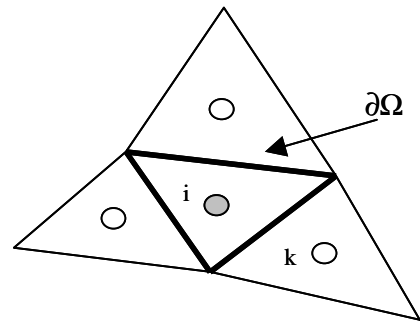


Fig. 4.1 Gradient and its path

(4.1)において(4.2)の勾配の値がそのまま用いられたのであれば再構築された値が、要素内での保存量の勾配を求めるのに用いた要素境界値をこえてしまう場合があるので(4.2)の勾配値を制限する必要がある。つまり、(4.1)の代わりに

$$U_i(x, y) = U_i^{center} + \Phi_i \nabla U_i \cdot \mathbf{dr} \quad (4.4)$$

を用いる。ここで  $\Phi_i$  は制限関数と呼ばれるもので種々のものが考案されている。制限関数は0から1の間の値をとり、 $\Phi_i = 1$  で線形分布 (linear reconstruction)、 $\Phi_i = 0$  で要素内で一定 (piecewise constant reconstruction) である。本手法では minmod の制限関数<sup>(3)</sup>を用いた。

### 5. 時間進行法

時間進行は陽的に2段階 Runge-Kutta 法によりおこなう。(3.4)より具体的に

$$\begin{aligned} \bar{U}_K^{n+1/2} &= \bar{U}_K^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Omega_K} \sum_{e \in \partial K} \Phi(\bar{U}_K^n, \bar{U}_{Ke}^n, \mathbf{n}_{e,K}) |e| \\ \bar{U}_K^{n+1} &= \bar{U}_K^n - \frac{\Delta t}{\Omega_K} \sum_{e \in \partial K} \Phi(\bar{U}_K^{n+1/2}, \bar{U}_{Ke}^{n+1/2}, \mathbf{n}_{e,K}) |e| \end{aligned} \quad (5.1)$$

のように時間進行する。時間刻みは通常の気体力学の場合と異なり

$$\Delta t = CFL \left( \frac{\max(|u_n| + c_f)}{\text{length}} \right) \quad (5.2)$$

により求める。ここで length はセル境界の代表長さである。

### 6. 解適合格子法

衝撃波や接触不連続面など局所的にながれの変化のはげしいところにのみ細かい格子を配置し、ながれの変化がゆるやかな箇所には粗い格子を配置することで計算効率を向上させる手法を解適合格子法とよぶ。衝撃波と一様流の格子スケールを変えることで解の解像度を変化させることができ、高解像度が要求される衝撃波や接触不連続面の捕獲精度を飛躍的に向上できるため、解適合格子法は気体力学の衝撃波解析で有効な手段と考えられてきた。

理想 MHD では磁気音波やアルフベン波などいくつかの波動が存在しその挙動は一般に複雑である。実際、理想 MHD 方程式の流束のヤコビアン行列にはこれらの波により7つの固有値が存在し、それぞれの波に対して固有値および固有ベクトルを求めセル境界での流束を評価することを考えると計算量は通常の気体力学に比べかなり多くなる。さらに速いながれでは理想 MHD も圧縮性流体特有の衝撃波を形成するため、解適合格子法を導入し計算負荷を減らすのと同時に解の解像度を上げなければならない。そこで本手法では三角形格子を用いた解適合格子法を理想 MHD 方程式に適用する。

格子の分割の仕方は Fig. 6.1 のように、各セル境界の midpoint を頂点とする三角形格子を新たに設けることで、1回の分割で1つの格子を4分割にする。結合はこれと逆の操作をする。どの格子を分割、結合するかを決定する分割・結合の指針値は(6.1)に示す指針値を用いる。

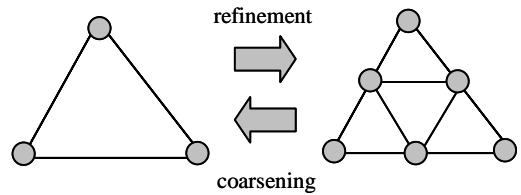


Fig. 6.1 Refinement-coarsening procedure

$$E_i = \max_e \left( \frac{|(\nabla U)_e - (\nabla U)_i|}{|(\nabla U)_e| + |(\nabla U)_i| + \varepsilon |U_i| d^{-1}} \right) \quad (6.1)$$

変数  $U$  には密度を用いる。添え字の  $i$  は着目セルを  $e$  は着目セルに隣接するセルである。  $d$  はセルの代表長さで三角形格子を構成する3辺の長さの平均値である。  $\varepsilon$  は微小量で  $\varepsilon = 0.05$  である。分割の目安となる値を  $E_{refine}$ 、結合の目安となる値を  $E_{coarse}$  としたとき、 $E_i > E_{refine}$  なら分割マークを、 $E_i < E_{coarse}$  なら結合マークをセルにつける。分割と結合は分割を優先するため、同一セルに分割マークと結合マークがつく場合にはそのセルを分割するものとする。

### 7. 数値解析結果

MUSCL 法による高次精度化の検証として、Brio<sup>(4)</sup>らにより提案された MHD 衝撃波管問題の1次元解析を行った。また、MUSCL 法および解適合格子法の検証として Aslan<sup>(5)</sup>により提案されたステップつき MHD 風洞内の超音速 MHD 流の解析を行った。

#### (1) MHD 衝撃波管

1次元解析において(2.7)の磁場の発散条件は

$$B_x = \text{Const.} \quad (7.1)$$

となる。本解析ではこれを  $B_x = 0.75$  としている。初期条件は

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.4 \\ (\rho, u, v, w, B_y, B_z, p)_l &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ (\rho, u, v, w, B_y, B_z, p)_r &= (0.125, 0, 0, 0, -1, 0, 0.1) \end{aligned} \quad (7.2)$$

である。磁場の初期値以外は気体力学における Sod の衝撃波管と同じ解析条件である。線メッシュを用いセル数は 800 とした。各セルの長さは 1 であり、 $t=0$  で衝撃波を  $x=400$  の位置にたて計算を開始した。両端の境界条件は半無限境界条件とした。クーラン数は 0.2 で  $t=80$  のときの解析結果を以下に示す。

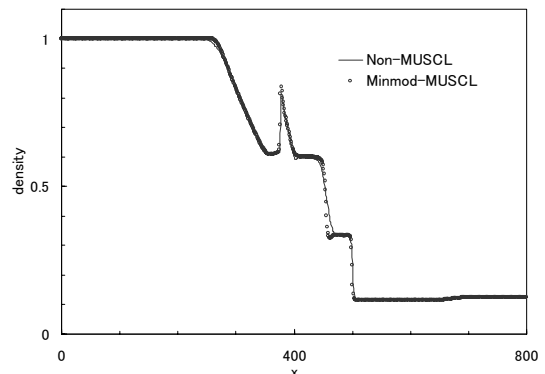


Fig. 7.1 Density distribution

Fig. 7.1 は MUSCL 法を適用した場合とそうでない場合の密度分布である。密度が一定値である部分を挟んで5つの特徴的な波動が存在する。左側から速い膨張波、合成波（中間衝撃波 + 遅い膨張波）、接触不連続面、遅い衝撃波、早い膨張波である。MUSCL 法により接触不連続面の捕獲精度が向上していることを見るために接触不連続面付近の拡大図を Fig. 7.2 に示す。

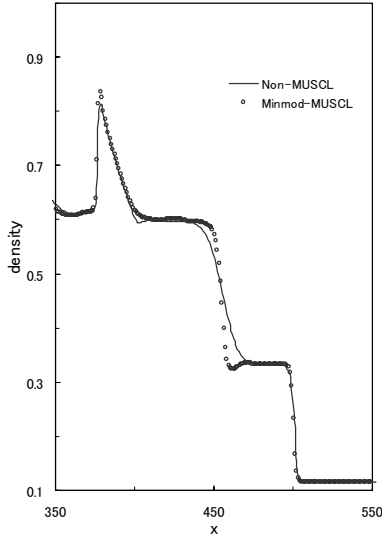


Fig. 7.2 Close up view around the contact

Fig. 7.2 より MUSCL 法を適用することで若干のアンダーシュートが接触不連続面後に見られるものの、接触不連続面はシャープに捕らえられていることがわかる。

## (2) ステップつき MHD 風洞

ステップつき風洞内の超音速流解析は、気体力学の数値解析の分野でおもにスキームの検証に用いられてきた。Aslan はこれを理想 MHD に適用した。Aslan は初期において z 軸方向にのみ磁場の分布を与えることで磁場の発散条件を回避している。理想 MHD では初期において値が 0 である磁場成分は時間進行しても 0 であることが、Ohm の法則およびファラデーの法則から簡単に導くことができる。したがって初期において磁場の x、y 成分がともに 0 であれば、2次元解析においては磁場の発散条件を考慮する必要はない。解析モデルを Fig. 7.3 に示す。マッハ数 3 の超音速 MHD 流が左側から流入するものとし、磁場の z 成分をパラメータとして変化させ解析した。初期条件を (7.3) に示す。境界条件は、風洞の左側は一様流の流入境界条件、右側は流出条件、上下壁面は壁面境界条件 (reflective boundary) である。壁面境界条件とは壁面上で速度と磁場の法線成分を 0 にし、それらの流束を 0 とする境界条件である。10 ステップごとに格子を再構築し、最大格子分割レベルを 4 として解適合格子法を適用した。計算条件を Table 7.1 に示す。

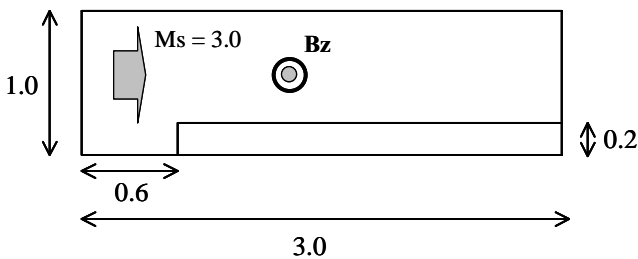


Fig. 7.3 Calculation model (MHD wind channel with a step)

$$\begin{aligned} \rho &= 1.4, p = 1.0 \\ u &= 3.0, v = w = 0.0 \\ B_x &= B_y = 0.0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

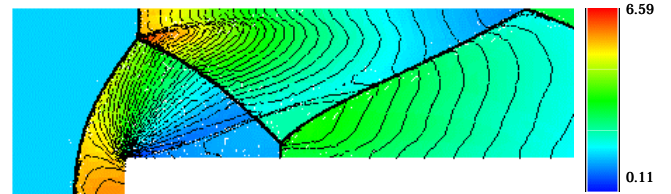
Specific value of  $B_z$

Table 7.1 Numerical condition

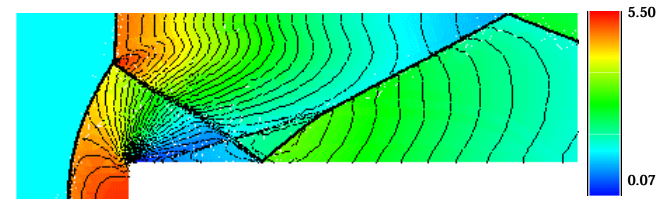
Ms	3
$\gamma$	1.4
CFL	0.5
adaptive	every 10 steps
Erefine	0.6
Ecoarse	indicator average
Max cell level	4

Table 7.1 において indicator average とは指針値の全セル平均を指す。初期格子の節点数は 1095、要素数は 2028 である。Fig. 7.4 に  $B_z$  を変化させたときの密度分布を示す。

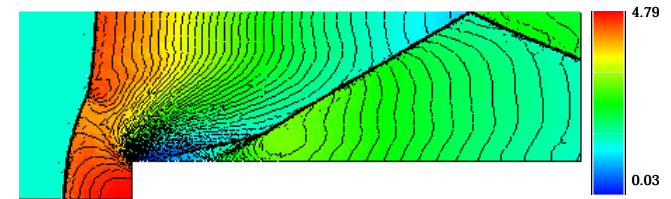
(a)  $B_z = 0$



(b)  $B_z = 25/4\pi\sqrt{4\pi}$



(c)  $B_z = 35/4\pi\sqrt{4\pi}$



(d)  $B_z = 40/4\pi\sqrt{4\pi}$

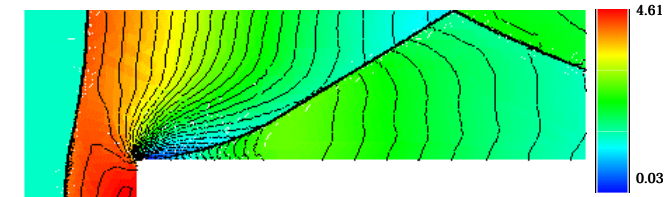
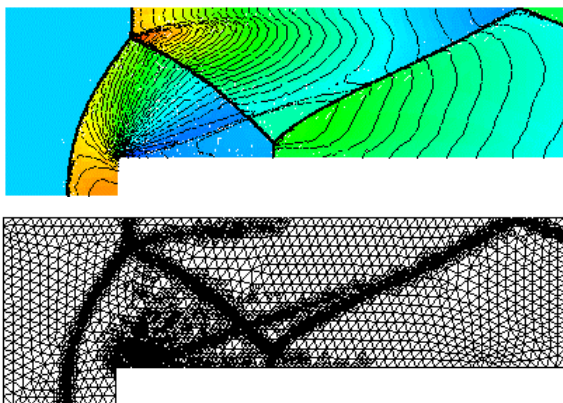


Fig. 7.4 Density contours for specific value of  $B_z$  ( $t=2.6$ )

Fig. 7.5 に  $B_z = 0$  と  $B_z = 35/4\pi\sqrt{4\pi}$  の場合について密度分布とそのときの解析格子図を示す。

(a)  $B_z = 0$  (26208 cells)



(b)  $B_z = 35/4\pi\sqrt{4\pi}$  (20577 cells)

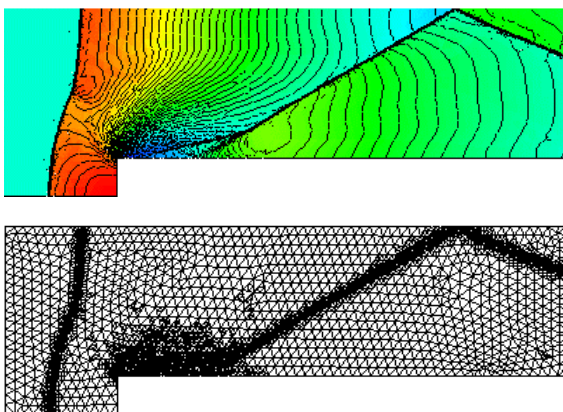


Fig. 7.5 Density contours and its adapted mesh (t=2.6)

Fig. 7.4 (a)  $B_z = 0$  の解析結果は気体力学における Euler 方程式を解いたときと等価である。入射衝撃波がステップ前面で湾曲し、上壁面で反射後、反射衝撃波が風洞下流で反射を繰り返す。マッハ反射の形態をとり上壁面に垂直に伸びるマッハステム、入射衝撃波、反射衝撃波が交わる三重点から右上方にすべり線が生じている。(b)  $B_z = 25/4\pi\sqrt{4\pi}$  になると三重点は上壁面から下方に移動しすべり線はほとんど見えなくなる。また、入射衝撃波もステップ前面に押し出されてくる。(c)  $B_z = 35/4\pi\sqrt{4\pi}$  になると三重点から右下方に伸びていた反射衝撃波、およびすべり線が消えてなくなり三重点は消失し、マッハステムと入射衝撃波が一体となり弓形の衝撃波 (bow shock) を形成する。(d)  $B_z = 40/4\pi\sqrt{4\pi}$  になると強い弓形の衝撃波がステップ前面に形成される。Fig. 7.5 の格子図をみると最大分割レベルの格子が、入射衝撃波、反射衝撃波、すべり線、ステップ下壁面上部の膨張波付近に集中的に分布し、効率のよい格子配置が実現できているのがわかる。

## 8. 結言

MUSCL 法により高精度化することで、MHD 衝撃波管において接触不連続面の捕獲精度をあげることができた。MHD 風洞の解析において解適合格子法を導入することで、効率よく格子を分布させることができ、少ない格子数で MHD 衝撃波を鮮明に捕らえることができた。また、初期の  $z$  成分の磁場を強くすることで三重点が消失し、マッハステムと入射衝撃波が一体となった強い弓形の衝撃波がステップ前面に形成されることがわかった。本手法は理想 MHD 方程式の解法において有効であることがわかった。今後の課題としては、MHD 衝撃波管において接触不連続面背後のアンダーシュートを除去すること、初期状態で磁場の  $x$  成分、 $y$  成分が存在する場合を、磁場の発散条件を考慮した数値解析法を用いて解析を行うことなどがあげられる。

## 参考文献

- (1) Patricia Cargo and Gerard Gallice, Roe Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe Matrices for Systems of Conservation Laws, *Journal of Computational Physics* 136,446-466,1997
- (2) P.L.ROE and D.S.Balsara, Notes on the Eigensystem of Magnetohydrodynamics, *SIAM Journal of Applied Mathematics* vol.56,No.1,57-67,1996
- (3) D.D.Zeeuw, An Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equations, *Journal of Computational Physics* 104,56-68,1993
- (4) M.Brio, An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 75,400,1988
- (5) Necdet Aslan, Two-dimensional Solutions of MHD Equations with an Adapted ROE Method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 23,1211-1222,1996