差分格子 Boltzmann 法による流体音の数値計算

Numerical Simulation of Aerodynamics Sound by Finite Difference Lattice Boltzmann Method

蔦原　道久，神戸大院，〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台 1-1, tutahara@mech.kobe-u.ac.jp
○　栗田　　誠，神戸大院，〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台 1-1,kurita@mi-1.mech.kobe-u.ac.jp
片岡　　武，神戸大院，〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台 1-1,kataoka@mech.kobe-u.ac.jp
Michihisa TSUTAHARA, Graduate School of Science and Technology ,Kobe Univ, Nada ,Kobe,657-8501
Makoto KURITA, Graduate School of Science and Technology ,Kobe Univ, Nada ,Kobe,657-8501
Takeshi KATAOKA, Graduate School of Science and Technology ,Kobe Univ, Nada ,Kobe,657-8501

We study the numerical simulation of the aerodynamics sound generated by a uniform flow over a two dimensional circular cylinder by finite difference lattice Boltzmann method (FDLBM). We use the compressible fluid model of LBM, and use the two-order-accurate Runge-Kutta scheme for time marching, the third-order-accurate up-winding scheme for spatial derivation, in discritization of the lattice BGK equation. We succeed in capturing vary small acoustic pressure fluctuation with same frequency of the Karman vortex street compared with the pressure fluctuation around a circular cylinder.

１．緒言

これまで流体音の数値計算は音圧の変動が流体の圧力変動に対して非常に微小であるため，それを捕らえるのに高精度の計算スキームを要すること，また音波の測定範囲が広範囲にわたるため，広く計算領域を設定する必要があることなど計算機に対する負荷が大きいことから困難とされてきた．しかし計算機の性能の向上に伴い数値流体音解析は急速に発展し，最近では Navier-Stokes 方程式の直接計算などによる流体音の数値計算例の報告がなされている [1)2)]．

そこで新たな試みとして差分格子 Boltzmann 法(FDLBM)による流体音の数値計算を行った．本報では格子 Boltzmann 法(LBM)の圧縮性（熱流体）モデルを用いて，2 次元物体周りの流れ場を対象とした流体音の数値解析を行い，その特性についての考察を報告する．

２．基礎理論

格子 Boltzmann 法は従来の流れの運動方程式を何らかの方法で離散化して解く手法とは異なり，流体を衝突と並進を繰り返す多数の離散的粒子の集合体と考え，それらの規則的な粒子運動を計算することにより巨視的な流体運動を模擬する流体の数値計算法である [3)]．また差分格子 Boltzmann 法は LBM に差分スキームを導入し，格子と離散的粒子速度を独立に扱えるようにした手法である．本研究では圧縮性流体を取り上げ，離散的粒子速度には正方格子の 2 次元 21 速度(2D21V)モデルを用いる(Fig.1)．粒子は格子点上に静止するか，または 1 タイムステップ間に離散的粒子速度の格子に従って i 方向(i=1,2,…20)に移動する．衝突には粒子の質量，運動量およびエネルギーを保存するような衝突則に従って各格子点上で同時に行われる．一連の粒子運動は時刻 t，位置 $\mathbf{x}$ の格子点上で速度 $\mathbf{c}_i$ をもつ粒子数密度を表す分布関数 $f_i(\mathbf{x},t)$を用いて次式で表される．

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\mathbf{c}_i\cdot\nabla f_i(\mathbf{x},t)=-\frac{1}{\phi}\left[f_i(\mathbf{x},t)-f_i^{(0)}(\mathbf{x},t)\right] \quad (1)$$

ここでφは緩和係数であり，$f_i^{(0)}$は局所平衡分布関数である．右辺の衝突演算は，衝突により粒子分布が平衡状態に向かうことを表し，このモデルを格子 BGK モデルと呼ぶ．

局所平衡分布関数は圧縮性モデルの場合，流速 $\mathbf{u}$ について 3 次まで展開した次式を用いる．

$$\begin{aligned} f_i^{(0)}=F_i\rho\big[&1-2B(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{u})+2B^2(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{u})^2+B(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\\ &-4/3B^3(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{u})^3-2B^2(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big] \end{aligned} \quad (2)$$

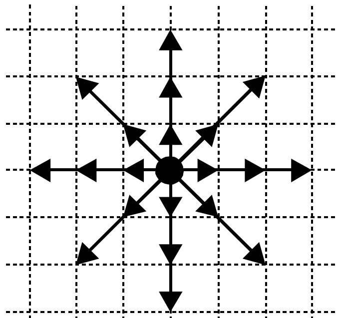


Fig.1 Distribution of particles in 2D21V model

ここで F_i および B は巨視的な流れの支配方程式を導出する際必要ないくつかの条件から一意的に決定される．

各格子点における流体の状態は，LBM の場合と同様で全粒子に $\mathbf{c}_i$ のモーメントをとり足し合わせたものに等しくなる．各格子点上における流体の密度，運動量およびエネルギーは以下のように表される．

$$\rho=\sum_i f_i \qquad \rho\mathbf{u}=\sum_i f_i\mathbf{c}_i \qquad \frac{1}{2}\rho u^2+e=\sum_i\frac{1}{2}f_ic_i^2 \quad (3)(4)(5)$$

(1)式は微視的・離散的な粒子運動を記述したものであり，流体運動を模擬するためには(1)から巨視的･連続的な流れ場を支配する Navier-Stokes 方程式系（連続の式，運動方程式，エネルギー方程式）を導出する必要がある．その導出過程においてφと動粘性係数νの間にはφ～νの関係が得られる．一方 FDLBM において計算を安定に進めるためには時間刻みをΔt としたときΔt/φ＜2.0 を満たす必要がある．従って高 Reynolds 数流れの計算を行う際，計算安定化の条件を満たすにはΔt を小さく設定する必要があり，初期の状態からある程度時間の経過した流体の状態を得るのに膨大な計算時間を要するといった問題がある．そこで(1)に新たに粘性項を操作するような項を追加した(6)を基礎方程式として用いる．

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\mathbf{c}_i\cdot\nabla f_i-a\mathbf{c}_i\cdot\nabla\frac{f_i-f_i^{(0)}}{\phi}=-\frac{1}{\phi}\left(f_i-f_i^{(0)}\right) \quad (6)$$

ここで a は定数である．(6)から導出されるφとνの関係はφ-a～νとなり，高 Reynolds 数流れの計算に対してもΔt を大きく設定でき，計算時間の短縮につながる．

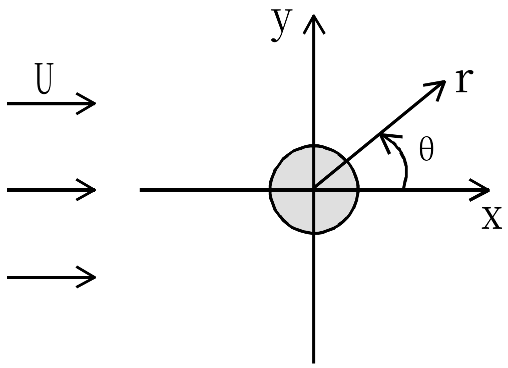


Fig.2 Simulation model

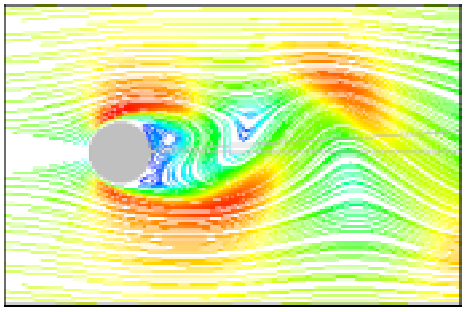


Fig.3 Streamlines of the flow (Re=200. M=0.2, t=130.)

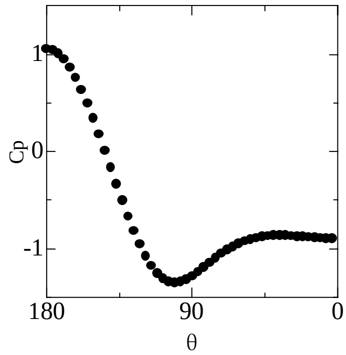


Fig.4 Pressure coefficient C_p

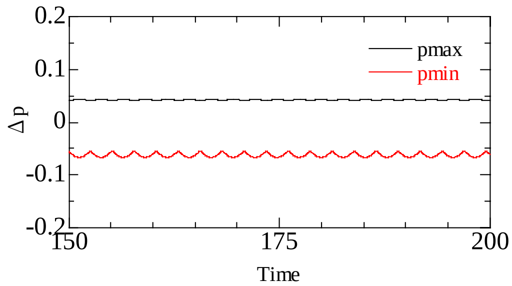
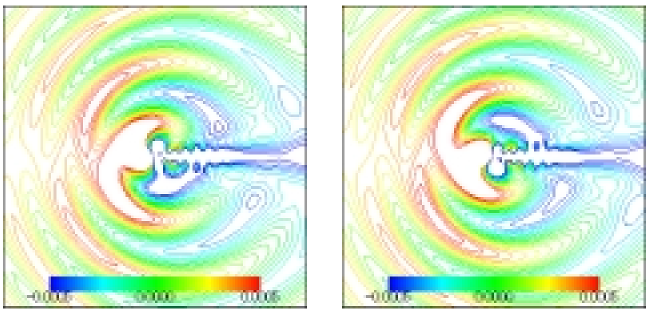


Fig.5 Time variation of maximum and minimum pressure


(a) t=130. (b) t=133.
Fig.6 Acoustic pressure distribution (Re=200. M=0.2)

3．問題設定

流れ場の対象として 2 次元の円柱を考える(Fig.2)．計算には円柱中心を原点とした極座標を用い，計算領域は円柱直径の 100 倍とした．観測点は円柱中心からの距離 r と下流方向から反時計回りの角度θで定義し, r 方向には不等間隔に 151 格子，θ方向には等間隔に 101 格子設定した．境界条件は物体上では粘着条件および断熱条件を適用した．

4．計算方法

(6)式を時間発展は 2 次精度の Runge-Kutta 法，空間微分を 3 次精度の風上差分法により離散化した．初期条件として全格子に平衡状態の一様流を与えた．

5．計算結果

以下に計算結果を示していく．

Fig.3 は Reynolds 数 Re=200.0，Mach 数 M=0.2(一様流速 U=0.2，内部エネルギーe=0.5)で，無次元時間 t=130.0 における流線である. 円柱の後方にカルマン渦列が形成されていることが確認できる.

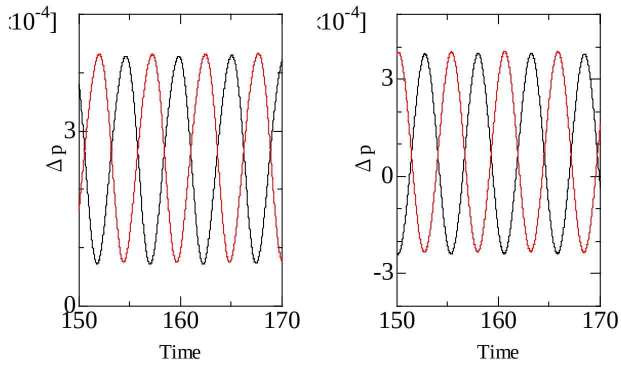
次に圧力を評価する．LBM では圧力 p は密度ρと内部エネルギーe を用い p=ρe で表される．本研究では今後圧力を基準圧力 $p_0(=\rho_0 e_0)$との差を無次元化したものΔp(=$(p-p_0)/p_0$)で評価する．Fig.4 は円柱表面での圧力係数 C_p である．C_p はカルマン渦の放出 1 周期分の時間で平均をとったものである．円柱前方で圧力が高く，剥離点に向かって一度圧力が低下し少し回復する様子が確認できる．Fig.5 は流れ場全体の圧力の最大値(pmax)と最小値(pmin)の時間変化の様子を表したものである．流れ場全体で圧力は-0.07～0.04 と 10^{-2} のオーダーで変動していることが分かる．

続いて音圧分布を示す．Fig.6 は$\pm 5\times 10^{-4}$ の間における圧力分布を表示したものである．図より，上流方向には赤で表示した正の圧力波，下流方向には青で表示した負の圧力波が円柱の上下から交互に周期的に伝播していく様子が確認できる．

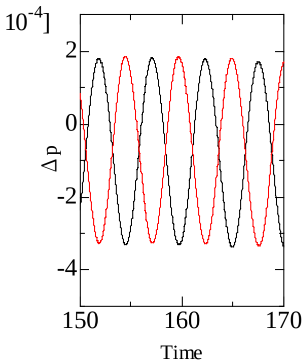
音波の発生メカニズムを考える．円柱後方にはカルマン渦列が形成されるが円柱の渦の放出される側では圧力が負になり，その反対側では圧力が正になる．渦は円柱の上下より交互に放出されるため，円柱上下で正負の圧力パルスが発生する．これが二重極音の発生であり，圧力波が音波としてそれぞれの方向に伝播する．

次にθ=90°と上流側，下流側のある方向について，円柱直径の約 50 倍離れた観測点における圧力の時間変動を示す(Fig.7)．ここで黒の実線が中心線より上側，赤が下側の観測点であり，上下でちょうど対称になるような点とする．各観測点とも圧力が 10^{-4}オーダーで周期的に変動していることが確認できる．その変動周期は無次元時間ΔT=5.2 となり，ストローハル数 S_t=0.19 となる．円柱のカルマン渦列の放出周期は実験により S_t=0.18～0.20 ということが確認されているので，このことより音波の圧力変動とカルマン渦列の周期が同期であることが分かり相関があることが考えられる．また各観測点において黒と赤の実線がちょうど半周期ずれていることより音波が円柱の上下より交互に放出されていることが確認できる．

次に r 方向の圧力分布を示す. Fig.8 は先ほどの各角度における r 方向の圧力分布である．また黒が無次元時間 t=130.0, 赤が t=131.0，青が t=132.0 における圧力である．各方向と

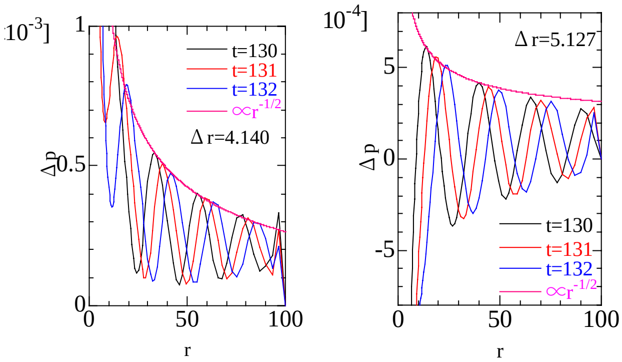


(a)　θ=147.6°,212.4°　　(b)　θ=90°,270°

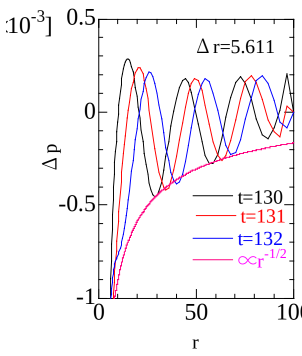


(c)　θ=57.6°,302.4°

Fig.7 Time variation of acoustic pressure



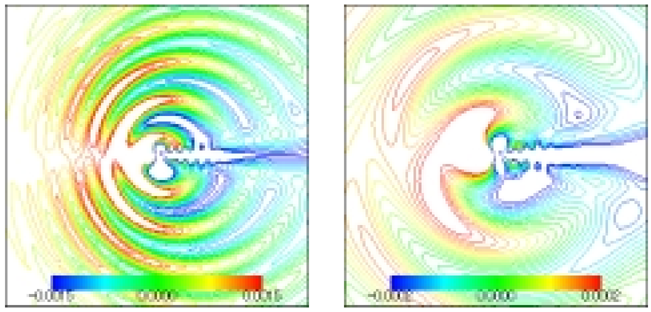
(a)　θ=147.6°　　(b)　θ=90°



(c)　θ=57.6°

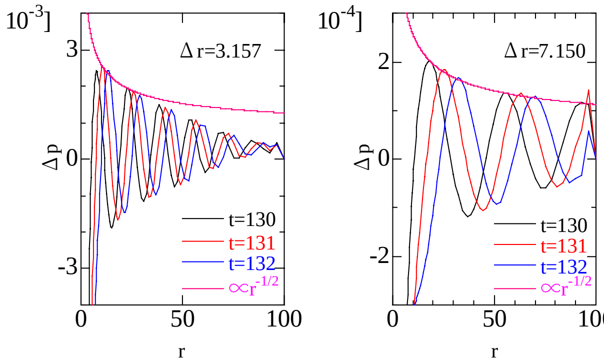
Fig.8 Propagation of acoustic pressure

10^{-4} オーダーで変動し，圧力のピーク値が円柱中心からの距離 r について $r^{-1/2}$ に比例して減衰していることが確認できる．これは線形理論とよく一致している．次に各方向において無次元時間 1 に音波が伝播する距離Δr を調べる．その結果，θ=90°の方向を中心とし，上流側に向かう音波は間隔が，



(a) M=0.3162 (e=0.2)　　(b) M=0.1414 (e=1.0)

Fig.9 Acoustic pressure distribution



(a) M=0.3162　　(b) M=0.1414

Fig.10 Propagation of acoustic pressure at　θ=90°

狭い，すなわち遅く伝播し，下流側に向かう音波は間隔が広い,すなわち速く伝播していることが分かる．これは一様流によるドップラー効果の影響が考えられる．各方向の音波の伝播速度は $c_\theta=c_s+U\cos\theta$ となる．ここで c_s は音速である．すなわち一様流と音波の伝播方向が逆になる上流側では伝播速度が遅く，反対に一様流と音波の伝播方向が同じ下流側では伝播速度が速くなる．また θ=90°方向では一様流の影響を受けずに音速で伝播する．

次に Mach 数の違いによる音圧分布を比較する．Fig.9 は M=0.3162，0.1414 での音圧分布である．本研究では一様流速 U は一定値(=0.2)とし，内部エネルギーe を変え音速を変化させることにより M を変えた．内部エネルギーはそれぞれ e=0.2，1.0 である．各 Mach 数とも同形態の音波のパターンが確認できる．また Mach 数の増加に伴い，音波のパターンの数が多くなりパターンの間隔が狭くなることが確認できる．これは内部エネルギーの増加に伴い音速が速くなるためである．Fig.10 は各 Mach 数で θ=90°における r 方向の圧力分布である．先ほどと同様，圧力のピーク値が円柱中心からの距離 r について $r^{-1/2}$ に比例して減衰していることが確認できる．また Mach 数の増加に伴い，音圧の大きさΔp が大きくなることが確認できる．そして Mach 数の増加，すなわち内部エネルギーの減少に伴い，音波が無次元時間 1 に伝播する距離Δr が小さくなることが確認できる．

LBM では音速 c_s は内部エネルギーe を用いて $c_s=(2e)^{1/2}$ で表される．したがって音波が音速で伝播する時，無次元時間 1 に音波が伝播する間隔Δr と理論音速 c_s を無次元化したものが等しくならなければならない．Fig.11 は数値計算より求めた伝播距離Δr と理論音速 c_s の比較である．各内部エネルギーで数値計算結果と理論値がよく一致していることが確認できる．

次に Mach 数による音圧の大きさΔp を考察する．Fig.12 は各 Mach 数の θ=90°で円柱直径の約 50 倍離れた観測点に

における圧力の時間変動の様子である．前述のように Mach 数の増加に伴い音圧の大きさ Δp が大きくなることが分かる．線形理論では $\Delta p \sim M^{5/2} \cdot r^{-1/2}$ の関係がある．そこで圧力のピーク値をとるような無次元時間を t_1 とし，その前後 10 間隔において $\Delta p/M^{5/2}$ を示す(Fig.13)．その結果，各 Mach 数がほぼ 1 本の線で重なったことより，本計算結果と線形理論がよく一致することが確認できる．

次に Mach 数による音波の進行方向について考察する．Fig.14 は各 Mach 数において音圧の時間平均をとったものである．その結果，上流側は赤で表示した正の圧力，下流側は青で表示した負の圧力になっていることが分かる．次に音圧から時間平均圧力を引いたものを Fig.15 に示す．その結果，正負の音波が同じ上流方向に向かって伝播していることが確認できる．したがって正の音波が上流方向，負の音波が下流方向に向かって伝播しているように見えたのは，平均圧力の影響であると考えられる．また平均圧力に対する音波の進行方向は Mach 数の増加に伴い上流方向に傾くことが確認できる．

6．結言

本研究では FDLBM の圧縮性モデルを用い，2 次元物体周りの流れ場を対象とした流体音の数値計算を行った．以下に結言を示す．

(1) 本手法を用いて円柱周りの揚力変動により生じるカルマン渦列に同期した二重極音(エオルス音)を捕らえた．

(2) 音波の伝播速度は一様流によるドップラー効果の影響で上流に向かう音波は遅く，下流に向かう音波は速くなることを確認した．

(3) 音圧の大きさは Mach 数 M について $M^{5/2}$ に比例し，距離 r について $r^{-1/2}$ に比例すること確認した．これは線形理論に一致している．

(4) 音波は上流側の正の圧力，下流側の負の圧力という平均圧力の影響で上流方向に正の音波，下流方向に負の音波が伝播するように見える．また平均圧力に対する音波は正負とも上流側の同じ方向に伝播し，Mach 数の増加に伴い，進行方向が上流側に傾く．

参考文献

1) 細谷，畠山，庄司，井上：“円柱周りの流れにより発生する音の直接数値計算”，第 14 回数値流体力学シンポジウム

2) 山本，矢部：“CIP 法による流体音の直接計算”，第 14 回数値流体力学シンポジウム

3) 蔦原，高田，片岡：“格子気体法・格子ボルツマン法”，コロナ社，第 4 章

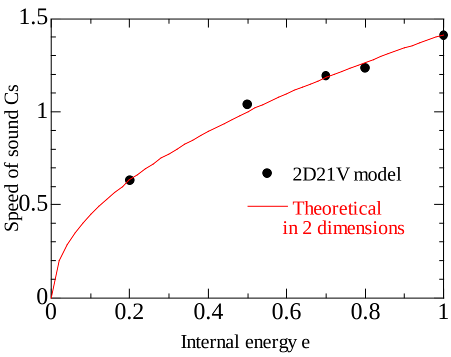


Fig.11 Numerical results of speed of sound in 2 dimension fluid

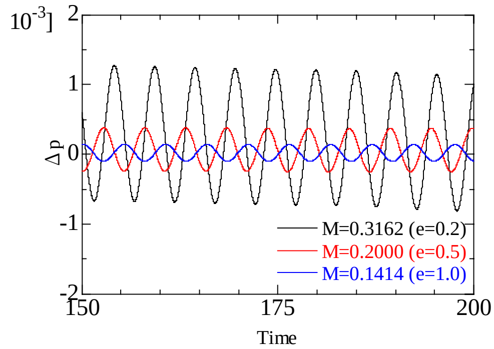


Fig.12 Time variation of acoustic pressure at $\theta = 90°$

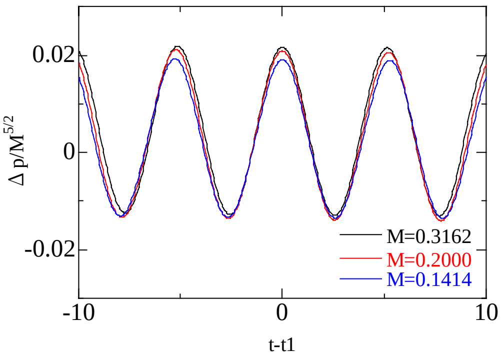
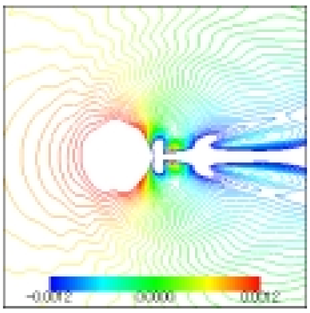
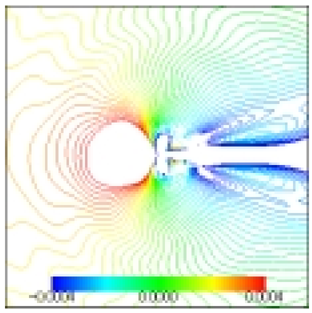


Fig.13 Scaling of acoustic pressure by Mach number


(a) M=0.3162


(b) M=0.20

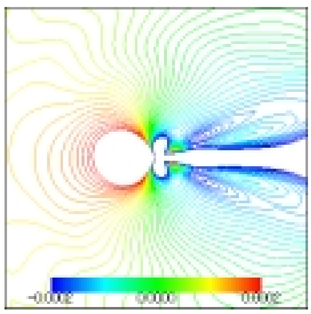
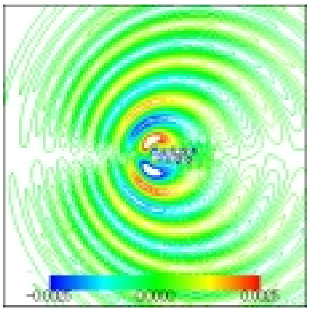
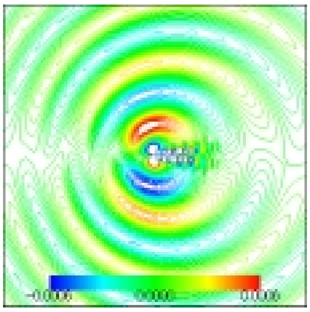

(c) M=0.1414

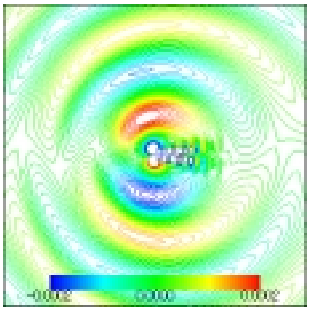
Fig.14 Mean acoustic pressure



(a) M=0.3162



(b) M=0.20



(c) M=0.1414

Fig.15 Pressure given by subtracting the mean pressure from the acoustic pressure