Ffowcs Williams–Hawkings の式によるエオルス音の解析

Analysis of Aeolian Tones by Ffowcs Williams–Hawkings Equation

○ 畠山　望, 東北大流体研, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1, Email: hatakeyama@ifs.tohoku.ac.jp
佐藤　和範, 東北大流体研, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1
井上　督, 東北大流体研, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1, Email: inoue@ifs.tohoku.ac.jp
Nozomu HATAKEYAMA, Inst. Fluid Sci., Tohoku Univ., Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN
Kozunori SATOU, Inst. Fluid Sci., Tohoku Univ., Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN
Osamu INOUE, Inst. Fluid Sci., Tohoku Univ., Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN

Aeolian tones generated by a circular cylinder in a two-dimensional uniform flow are analysed by using the Ffowcs Williams–Hawkings equation which is the exact solution of Lighthill's equation in the source-moving frame. A two-dimensional formula of the Ffowcs Williams–Hawkings dipole is obtained and compared with the solution given by direct numerical simulations of the compressible Navier–Stokes equations. It is found that the aeolian tones are well approximated by the resulting dipole in which both the Doppler effect and the pseudo sound are involved. The exact dipole formula is rather complex althought it can be computed from only the force exerted on the fluid by the cylinder, so a simpler formula is also introduced.

1. 緒言

二次元円柱まわりの流れにより発生するエオルス音について, 非定常圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーション (DNS) を用いて研究を進めてきた.[1−3] 音響学的アナロジーに基づく Lighthill 方程式[4]の, 無限遠と物体表面がともに静止する系における厳密解である Curle の式[5]が, 一様流中の静止物体が発するエオルス音についても, ドップラー効果を含んだ形に変形することで DNS の結果を良く近似できることも分かってきた.[2,3] 本研究では, 無限遠静止系における移動物体まわりの変動密度場の厳密な積分解である, Ffowcs Williams–Hawkings (FWH) の式[6]の二重極成分を物体静止系へとガリレイ変換した二次元表式を求め, これを DNS と比較することによって適切な二重極近似の可能性を探る. この FWH の二次元二重極式は, ドップラー係数に時間積分変数を含んだ複雑なものとなる. より簡単な表式である, 前述のドップラー効果を含むように変形された Curle の二重極近似式についても, FWH との対応関係を示して式変形の数学的な根拠を与える.

2. 直接数値シミュレーション

円柱中心を原点とする二次元デカルト座標系 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ において, 一様流速度 $(U, 0)$ を与える. 原点からの距離を r, 上流からの角度を θ とし, 物理量は静止密度 ρ_0, 静止音速 c_0 及び円柱直径 D で無次元化する. 非定常の二次元圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式を, 空間微分を 6 次精度 Padé 型コンパクト有限差分法,[7] 時間進行を 4 次精度 Runge-Kutta 法によって, 直接数値的に解く. 計算境界は, 円柱表面で断熱すべりなしとし, 遠方では無反射境界条件[8]を適用する. 極座標非一様格子を用いるが, 有効な計算領域は $r \leq 100$ とし, その外側には $r = 1500$ までバッファー領域を設け後流の渦度が適切に減衰するようにしている. 格子点は 871 (r) × 503 (θ) の約 44 万点となった. 以下では, マッハ数 $M = U/c_0 = 0.2$, 一様流速に基づくレイノルズ数 $Re = UD/\nu = 150$ の場合について示す (ν は動粘性係数).

時刻 $t = 2000$ で得られた圧力場を Fig. 1 に示す. (a) は時間平均圧力場からの変動音圧場 $\Delta p'$, (b) が平均圧力場 $\overline{\Delta p}$, (c) が全圧力場 Δp の等圧線図となっている. ここで p_0 を静止圧力として, $\Delta p(\boldsymbol{x}, t) = p(\boldsymbol{x}, t) - p_0$, $\overline{\Delta p}(\boldsymbol{x})$ は Δp の時間平均, $\Delta p'(\boldsymbol{x}, t) = \Delta p - \overline{\Delta p}$ と定義している. ρ_0 と c_0 による無次元化のため, p_0 は比熱比 γ の逆数になり, 二原子分子気体と仮定して $p_0 \approx 0.714$ となる. 等圧線は間隔を 5×10^{-5} とし, 正値, 負値, 0 値をそれぞれ赤, 青, 緑で表している. Figure 1 (a) より, 円柱近傍で発生したエオルス音は, 一様流に垂直な方向に交互に放射されていることから二重極音とみなせるが, ドップラー効果により指向性を一定角度だけ上流側に傾けて伝播している. Figure 1 (b) の平均圧力場は, 後流領域の影響はあるものの, 上流が正, 下流が負となる二重極性を示している. この平均圧力場の影響を受けるために, Fig. 1 (c) の全圧力場では正負のピークがそれぞれ上流側と下流側にずれていることが分かる.

3. Ffowcs Williams–Hawkings の式

音響学的アナロジーに基づき, 非定常圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式から Lighthill 方程式が厳密に導かれる.[4] 移動境界が存在する場合には, その外側の音の伝播は次の Ffowcs Williams–Hawkings 方程式で表される.[6]

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\left[H(f)c_0^2(\rho - \rho_0)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[H(f)T_{ij}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[p_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}H(f)\right] \quad (1)$$

T_{ij} は乱流応力テンソル, σ_{ij} を粘性応力テンソルとして $p_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \sigma_{ij}$ は圧縮応力テンソル, $f = f(\boldsymbol{x}, t)$ は境界の内側が正, 外側が負の値を持つ境界指示関数で, $H(f)$ はヘビサイドの階段関数である. 全時空間で $f > 0$ とすれば, Lighthill 方程式となる. ここでは, 境界で流体速度と境界速度が一致して一定であることを仮定している. 式 (1) の無限遠静止系における厳密な積分解が, Ffowcs Williams–Hawkings の式である.[6]

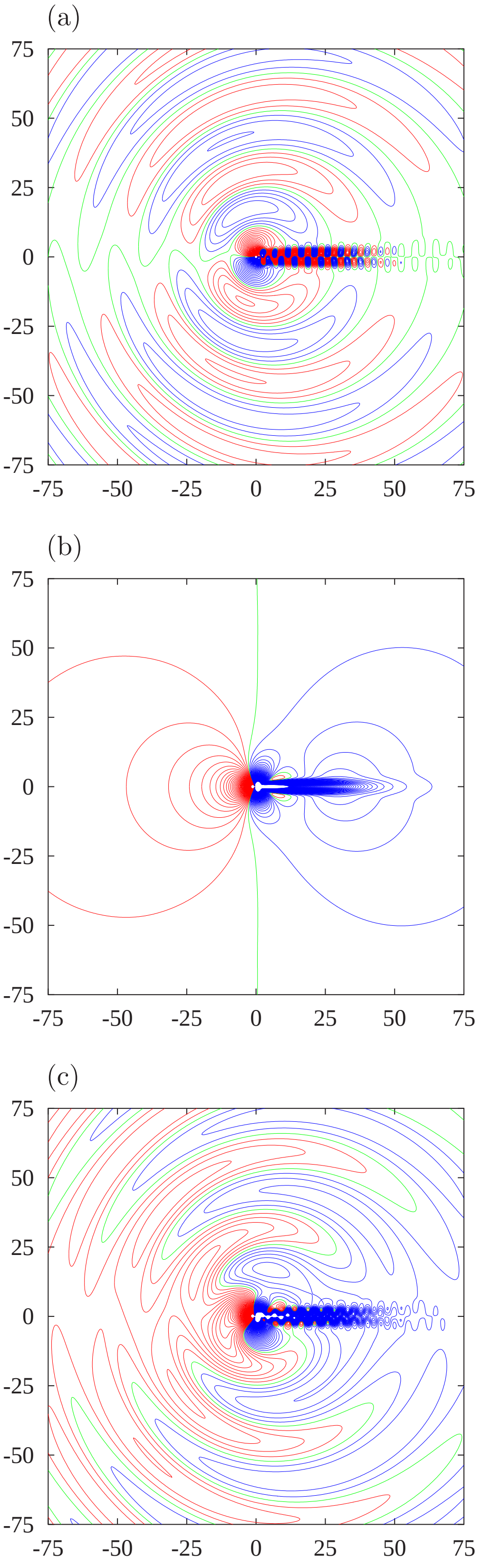

Fig. 1: Isobars with respect to the ambient pressure level p_0, obtained by DNS: (a) fluctuating pressure $\Delta p' = \Delta p - \overline{\Delta p}$; (b) mean pressure $\overline{\Delta p}$; (c) total pressure $\Delta p = p - p_0$. $M = 0.2$, $Re = 150$, $t = 2000$. Contours at intervals of 5×10^{-5}: ——, positive; ——, negative; ——, 0

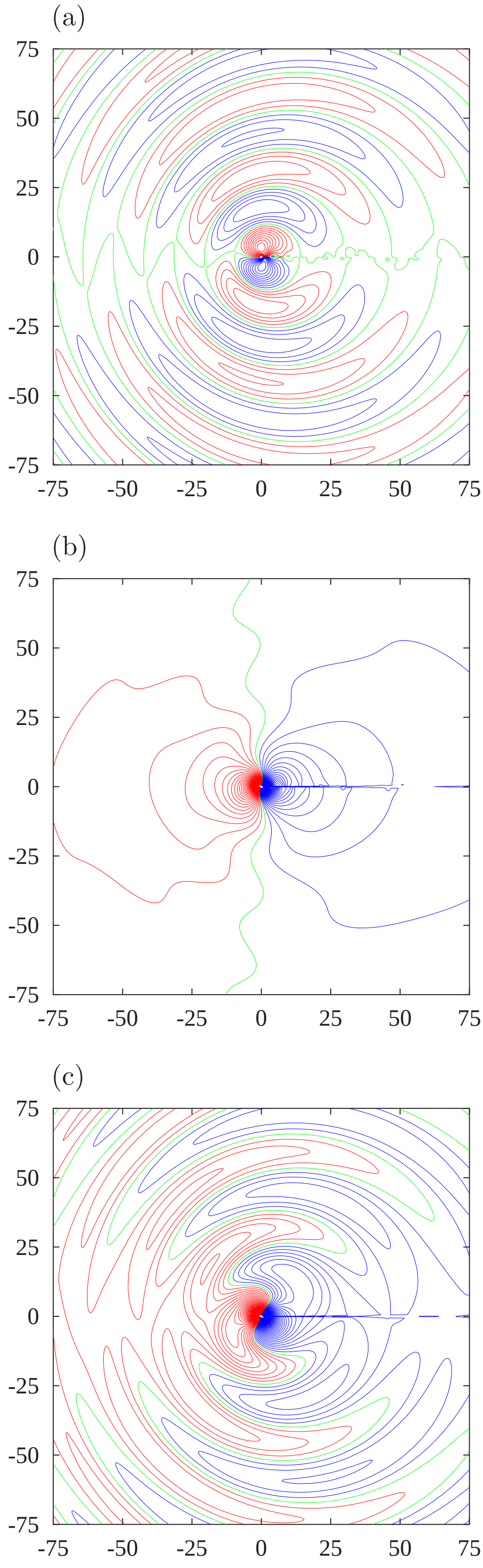

Fig. 2: Isobars with respect to the ambient pressure level, computed from the Ffowcs Williams–Hawkings dipole equation: (a) propagating term Δp_1; (b) pseudo sound term $\Delta p_2 + \Delta p_3$; (c) total dipole Δp_{FWH}. Contours at intervals of 5×10^{-5}: ——, positive; ——, negative; ——, 0

二次元の FWH 式は, 周波数ドメインにおける表現が 0 次ハンケル関数を用いて与えられているが,[9] ここでは二重極成分のみを, 階段関数を含む時空間グリーン関数

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t-\tau)=\frac{H(t-\tau-R/c_0)}{2\pi\sqrt{(t-\tau)^2-(R/c_0)^2}} \tag{2}$$

によって直接導出することにする．ここで, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$, $R=|\boldsymbol{R}|$ である．二重極成分は, 式 (1) の右辺第二項の積分により与えられる．

一定な移動物体速度を $\boldsymbol{M}c_0$, $M=|\boldsymbol{M}|$ とし, 物体境界 S が音響学的にコンパクトで点とみなせるとする．物体に固定した座標系 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{\eta},\tau)-\boldsymbol{M}c_0(\tau-t_0)$ で表面積分し, 時間積分変数の変換 $\tau'=\tau-t+R/c_0$ を行うと,

$$\begin{aligned}
&\Delta p_{\mathrm{FWH}}(\boldsymbol{x},t)\\
&=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\sqrt{-\tau'}}\left[\frac{(2\pi c_0)^{-1}R_i\dot{F}_i}{(1-M\cos\Theta)^2R\sqrt{2R/c_0-\tau'}}\right]_\tau\\
&+\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\sqrt{-\tau'}}\left[\frac{(2\pi c_0)^{-1}R_iF_i}{(1-M\cos\Theta)^2R\sqrt{(2R/c_0-\tau')^3}}\right]_\tau\\
&-\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\sqrt{-\tau'}}\left[\frac{(2\pi)^{-1}P_{ij}(\mathbf{R})M_iF_j}{(1-M\cos\Theta)^3R\sqrt{2R/c_0-\tau'}}\right]_\tau\\
&-\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\sqrt{-\tau'}}\left[\frac{(2\pi)^{-1}M^2P_{ij}(\mathbf{M})R_iF_j}{(1-M\cos\Theta)^3R^2\sqrt{2R/c_0-\tau'}}\right]_\tau
\end{aligned} \tag{3}$$

を得る． ここで, Δp_{FWH} は $c_0^2(\rho-\rho_0)$ の二重極成分, $F_i(\tau)=-\int_S dS_j(\boldsymbol{\eta})p_{ij}(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{\eta},\tau),\tau)$ は物体から流体に働く力, $\dot{F}_i$ はその微分, Θ は $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{M}$ のなす角, $P_{ij}(\boldsymbol{n})=\delta_{ij}-n_in_j/|\boldsymbol{n}|^2$ は $\boldsymbol{n}$ に垂直な面への射影テンソルであり, $[\ ]_\tau$ は時刻 τ での値 $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F},\Theta)$ を用いることを示す． ここでの位置座標 $\boldsymbol{x}$ は, 遠方静止系であることに注意する．式 (3) を物体静止系へとガリレイ変換すれば, 目的の表式が導かれることになる．こうして得られた式を改めて Δp_{FWH} とおき, 右辺第一項を Δp_1, 第二項を Δp_2, 第三項を Δp_3 と表す．右辺第四項は高次の微小項である．

DNS による圧力場 Fig. 1 に対応させて, FWH の二重極を成分ごとに Fig. 2 に示す．これは式 (3) より, 流体に働く力の時間変動 $\boldsymbol{F}(t)$ のみから計算できる．$\boldsymbol{F}$ の各成分 F_x および F_y は, それぞれ円柱に働く抗力および揚力の反作用である．DNS により得られた, 円柱に働く力と時間微分の変動を Fig. 3 に示す．$\boldsymbol{F}$ 自体は抗力が支配的で主に上流を向いているが, その時間微分ベクトル $\dot{\boldsymbol{F}}$ は揚力が支配的で, 流れに垂直な方向を交互に向くことがわかる．したがって式 (3) より, Δp_1 が後者に依存した揚力二重極, Δp_2 と Δp_3 が前者に依存した抗力二重極とみなせる．実際に, Fig. 1 と Fig. 2 を比較すると, Δp_1 は主流にほぼ垂直に伝播する二重極変動音圧場 $\Delta p'$ と, $\Delta p_2+\Delta p_3$ は上流を向いた二重極平均圧力場 $\overline{\Delta p}$ と対応していることがわかる．Fig. 2 で後流領域の等圧線が不連続となっているのは, 円柱を点とみなす近似を行っているためであるが, エオルス音は揚力二重極が支配的であり, 円柱から下流方向のこの誤差は無視できるといえる．FWH の二重極は全体としても, Fig. 2 (c) に見るように DNS による圧力場 Fig. 1 (c) をよく再現している．エオルス音については二重極式 (3) が, ドップラー効果と平均場効果を含む非常に良い精度の近似式であることが分かった．

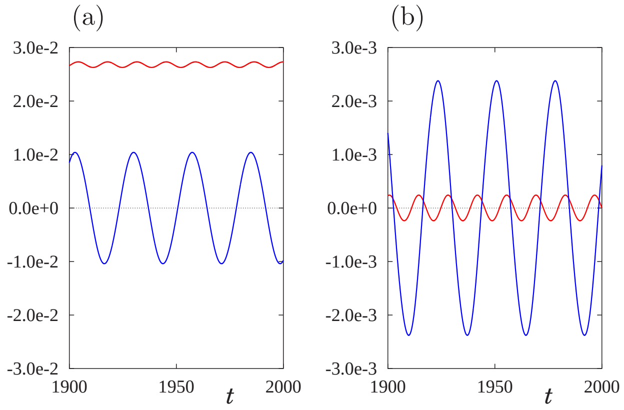

Fig. 3: Time histories of (a) forces on cylinder and (b) their time-derivatives: ——, lift; ——, drag. $M=0.2$, $Re=150$.

4. Curle の式の変形

物体境界及び無限遠方が静止している系では, Lighthill 方程式の厳密解は Curle の式で与えられる.[5] 二次元の場合には, 前章で FWH の二重極式を導出したのと同様にして, 二重極近似式を導くことができる.[2,3] 音源を音響学的にコンパクトであると仮定して, 空間微分を時間積分変数での微分に置き換える際に, 高次の項を省略せずに残すと, 次式が得られる．

$$\begin{aligned}\Delta p_{\mathrm{Curle}}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{2^{3/2}\pi c^{1/2}r^{1/2}}\int_{-\infty}^{\tau}dt'\,\frac{\hat{x}_i\dot{F}_i(t')}{\sqrt{\tau-t'}}\\
&+\frac{\hat{x}_i\overline{F}_i}{2\pi r}+\frac{c^{1/2}}{2^{5/2}\pi r^{3/2}}\int_{-\infty}^{\tau}dt'\,\frac{\hat{x}_iF_i'(t')}{\sqrt{\tau-t'}}\end{aligned} \tag{4}$$

ここで, c は音速, $\tau=t-r/c$ は遅延時刻, $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}/r$ は観測点の向きを表す単位ベクトル, $\overline{\boldsymbol{F}}$ は流体に働く力 $\boldsymbol{F}(t)$ の時間平均値, $\boldsymbol{F}'(t)=\boldsymbol{F}(t)-\overline{\boldsymbol{F}}$ は平均値からの変動である．右辺第一項を Δp_{C1}, 第二項を Δp_{C2}, 第三項を Δp_{C3} とおくことにする．この式は, FWH による式 (3) と比較して非常に簡単な形をしており, 各項の物理的意味も明白であるといえる．Δp_{C1} は振幅が伝播距離の $-1/2$ 乗に比例する音波を表す．残りは擬音場となる動圧成分であり, 時間変動しない Δp_{C2} と時間変動する Δp_{C3} から成る．FWH の二重極式の各項との対応関係は, $\Delta p_{\mathrm{C1}}\approx\Delta p_1$, $\Delta p_{\mathrm{C2}}+\Delta p_{\mathrm{C3}}\approx\Delta p_2+\Delta p_3$ となる．

実際には音速 c は一定ではなく, 一様流によるドップラー効果で角度依存性が現れると考えられる．円柱静止系において, 上流側から角度を定義して, Θ 方向に放射された音速 c_0 の音波が, マッハ数 M の一様流に押し戻されて θ の方向に音速 c で伝播していると考えると, 簡単な計算により $c=c_0(\sqrt{1-M^2\sin^2\theta}-M\cos\theta)$ を得る．前章で FWH の式をガリレイ変換する際にも, 同じ表式が得られる．この角度依存する音速 c を式 (4) で用いることで, ドップラー効果を取り入れることができる．

このように変形した Curle の二重極近似式 (4) による圧力場を, Fig. 4 に示す．FWH の場合と同様にして, DNS により得られた流体に働く力 $\boldsymbol{F}$ を代入して計算している．(a) が Δp_{C1}, (b) が $\Delta p_{\mathrm{C2}}+\Delta p_{\mathrm{C3}}$, (c) が $\Delta p_{\mathrm{Curle}}$ であり, それぞれが圧縮性 DNS による Fig. 1 (a–c) および FWH の二重極 Fig. 2 (a–c) と対応する．後流に渦度が存在する

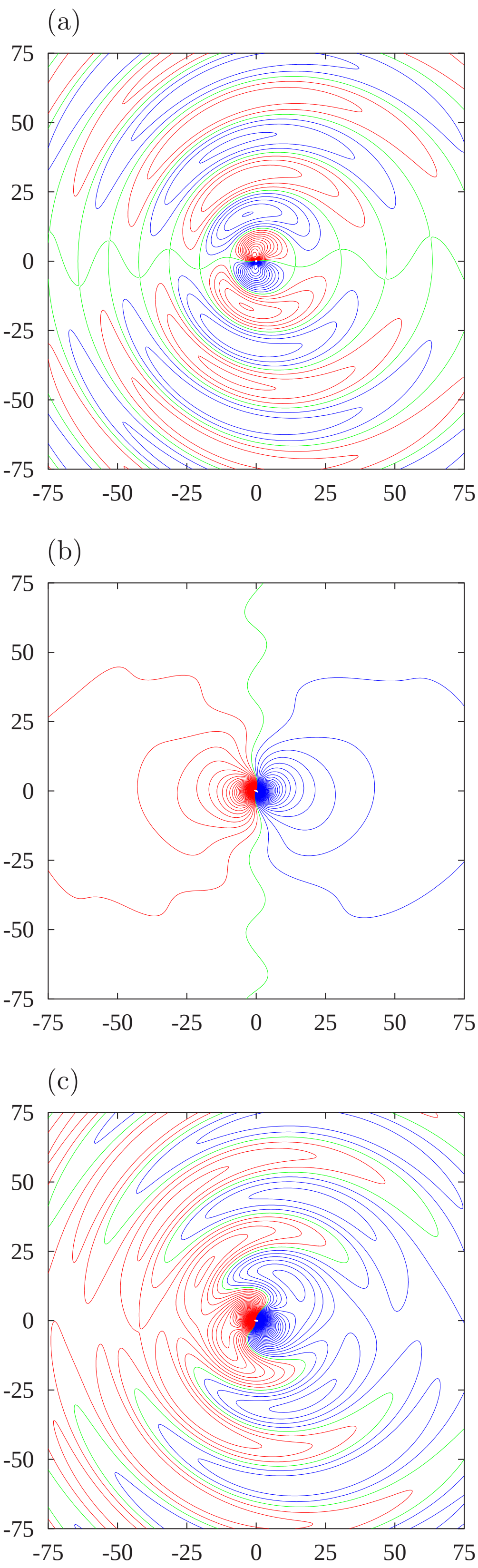

Fig. 4: Isobars with respect to the ambient pressure level, computed from the modified Curle's dipole: (a) propagation term Δp_{C1}; (b) pseudo sound term $\Delta p_{C2} + \Delta p_{C3}$; (c) total dipole $\Delta p_{\mathrm{Curle}}$. Contours at intervals of 5×10^{-5}: ——, positive; ——, negative; ——, 0

領域を除いて, Fig. 1 を非常に良く近似しており, 特に音波成分である (a) は Fig. 2 にほぼ一致する. 式 (4) は簡単な積分形をとるため, 数値計算が容易で各項の物理的な意味が明解であり, より厳密ではあるが複雑な積分を含む FWH の二重極式と同等の精度を持つ, 有用な近似式であるといえる.

5. 結言

音響学的アナロジーに基づく積分解である Ffowcs Williams–Hawkings の式の, 二次元における二重極近似表現を求め, 高精度の圧縮性 DNS により得られたエオルス音に対し適用して, その有効性を示すことができた. これにより, コンパクトな物体がその表面を通して流体に及ぼす力のみを用いて, 発生する音場を良い精度で予測可能であることが示唆される. 特に, 音圧場を表す項にはドップラー効果が, 擬音場を表す項には平均圧力場がそれぞれ適切に含まれているため, これまでよく用いられてきた近似式とは異なり, 物体静止系で無限遠圧力を基準とした圧力場を正しく表現することができる.

また, FWH の二重極式より簡単な形をした, ドップラー効果を含むように変形された Curle の二重極式を提案し, これも同様な精度でエオルス音を再現することが分かった. この式を構成する各項の FWH との対応も明らかとなり, 式変形の妥当性が示されたといえる.

本研究の数値計算は, 東北大学流体科学研究所のスーパーコンピュータシステムを利用して行われた.

参考文献

(1) Hatakeyama, N., Hosoya, H. and Inoue, O., “DNS of sound generated by cylinder wakes,” in *Computational Fluid Dynamics 2000*, edited by Satofuka, N. (Springer-Verlag, 2001), pp. 537–542.

(2) Inoue, O., Hatakeyama, N., Hosoya, H. and Shoji, H., “Direct Numerical Simulation of Aeolian Tones,” AIAA paper 2001-2132 (2001), pp. 1–11.

(3) 畠山, 佐藤, 井上, “エオルス音の DNS と音響学的アナロジーによる予測,” 日本流体力学会年会 20001 講演論文集 (2001), pp. 295–296.

(4) Lighthill, M. J., “On sound generated aerodynamically I. General theory,” Proc. Roy. Soc. A **211** (1952), 564–587.

(5) Curle, N., “The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound,” Proc. Roy. Soc. A **231** (1955), 505–514.

(6) Ffowcs Williams, J. E. and Hawkings, D.L., “Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion,” Phil. Trans. Roy. Soc. A **264** (1969), 321–342.

(7) Lele, S. K., “Compact finite deference schemes with spectral-like resolution,” J. Comput. Phys. **103** (1992), 16–42.

(8) Poinsot, T. and Lele, S. K., “Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows,” J. Comput. Phys. **101** (1992), 104–129.

(9) Guo, Y. P., “Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems,” J. Fluid Mech. **403** (2000), 201–221.