

# 二次元粘性流れ問題における格子ボルツマン法と従来型数値解法との比較に関する検討

Investigation of Comparison between the Lattice Boltzmann Method and Conventional Numerical Methods in Two-Dimensional Viscous Flow

津田智之, 信州大院, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: cslab06@gipwc.shinshu-u.ac.jp  
 吉野正人, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@gipwc.shinshu-u.ac.jp  
 松田安弘, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: matsuda@gipwc.shinshu-u.ac.jp  
 邵 長城, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: cslab01@gipwc.shinshu-u.ac.jp  
 竹内祐介, 信州大院, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: cslab08@gipwc.shinshu-u.ac.jp  
 Tomoyuki Tsuda, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan  
 Masato Yoshino, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan  
 Yasuhiro Matsuda, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan  
 Changcheng Shao, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan  
 Yusuke Takeuchi, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan

Two-dimensional incompressible viscous flow problems are calculated by using the lattice Boltzmann method (LBM) and the FDM, which is a conventional numerical technique based on the fourth-order finite-difference method. In the FDM, it is needed to solve the Poisson equation for the pressure by iterative approach, while in the LBM, such a special treatment is not required. The accuracy and the computational time are investigated for both calculated results for different Reynolds numbers. It is found from these results that the LBM is more efficient than the FDM in the complex flow problems such as flow in porous structures.

## 1. 緒言

非圧縮性粘性流体の熱流動解析において、最近注目されている数値計算法の一つに格子ボルツマン法(LBM)<sup>(1)</sup>がある。LBMとは、流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体(格子気体モデル)で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算することにより、巨視的な熱流動場を求めるシミュレーション法である。一般に、非圧縮性粘性流体の連続の式およびナビエ・ストークス方程式の従来の数値解法では、圧力を求める際に、ポアソン方程式を解く必要が生じる。特に、多孔質内流れなどの複雑な境界をもつ流れ場に対しては圧力も複雑になるため、通常、緩和法や反復法などのように、圧力の計算が発散しないような特別な工夫をしなければならない(例えば、文献(2)を参照)。これに対し、LBMでは、気体分子運動論のアナロジーから導かれた格子ボルツマン方程式に従って粒子の速度分布関数を逐次計算し、そのモーメントをとることによって圧力が計算されるため、圧力のポアソン方程式を解く必要がない。それゆえ、複雑な流れ場に対してもアルゴリズムが簡単で、計算時間の短縮が期待できる。しかしながら、実際の問題に対して、計算精度ならびに計算時間などの観点から、LBMと例えば差分法などの従来型数値解法との比較・検討を行った研究はあまり多く見られない。

本研究では、二次元非圧縮性粘性流れとして、正方形キャピティ内流れ問題と角柱からなる多孔質構造流れ問題をとりあげ、LBMと差分法による結果の比較・検討を行った。

## 2. 数値計算法

### 2.1 格子ボルツマン法

LBMにおける物理量はすべて、代表長さ $L$ 、粒子の代表速度 $c$ 、時間スケール $t_0 = L/U$  ( $U$ : 流れの代表速さ)、および基準密度 $r_0$ を用いて次のように無次元化したものであ

る<sup>(3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i / c, & \hat{x} &= x / L, & \hat{t} &= t / t_0, \\ \hat{f}_i &= f_i / r_0, & \hat{r} &= r / r_0, \\ \hat{u} &= u / c, & \hat{p} &= p / (r_0 c^2), \\ \hat{n} &= n / (cL) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

なお、LBMに関する以下の記述では、無次元量を表す $\wedge$ は省略化する。格子気体モデルとしていくつかのモデルが提案されているが、本計算では2次元9速度モデル<sup>(4)</sup>を用いる。2次元9速度モデルの粒子速度 $c_i$  ( $i=1,2,\dots,9$ )は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9] \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

2次元9速度モデルを用いたLBMでは、物理空間を等間隔の正方形格子に分割し、時刻 $t$ に格子点 $\mathbf{x}$ における速度 $c_i$  ( $i=1,2,\dots,9$ )をもつ粒子の分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ の時間発展を次式に従って計算を進めて求める。

$$f_i(\mathbf{x} + c_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{t} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad i=1,2,\dots,9 \quad (3)$$

ここで、 $\Delta x$ は格子間隔、 $\Delta t$ は時間刻み、 $t$ は緩和時間である。なお、時間刻み $\Delta t$ は、仮想粒子がちょうど隣の格子点まで移動する時間と等しくなるように選ぶ。また、 $f_i^{\text{eq}}$ は局所平衡分布であり、次式で表される<sup>(4)</sup>。

$$f_i^{\text{eq}} = E_i r \left[ 1 + 3c_i \cdot u + \frac{9}{2} (c_i \cdot u)^2 - \frac{3}{2} u \cdot u \right] \quad i=1,2,\dots,9 \quad (4)$$

ここで、

$$E_1 = \frac{4}{9}, \quad E_i = \frac{1}{9} (i=2,3,4,5), \quad E_i = \frac{1}{36} (i=6,7,8,9) \quad (5)$$

である．巨視的変数である流体の密度  $\mathbf{r}$  および流速  $\mathbf{u}$  は，粒子の分布関数  $f_i$  を用いて次のように定義される．

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^9 f_i \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^9 f_i \mathbf{c}_i \quad (7)$$

また，流体の圧力  $p$  は

$$p = \frac{1}{3} \mathbf{r} \quad (8)$$

となる．

(2)~(8)式で計算される巨視的変数  $\mathbf{u}$  および  $p$  が非圧縮性流体の連続の式およびナビエ・ストークス方程式を近似することは，曾根の漸近理論(S 展開)<sup>(5)</sup>を適用することにより示される．すなわち， $\Delta x$  と同じオーダーの微小パラメータ  $\epsilon$  を用いて S 展開された式  $\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + O(\epsilon^3)$  および  $p = \epsilon^2 p^{(2)} + \epsilon^3 p^{(3)} + O(\epsilon^4)$  が次式を満足することがわかる．

$$\frac{\partial u_g}{\partial x_d} = 0 \quad (9)$$

$$Sh \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_g}{\partial x_d} = -\frac{\partial p}{\partial x_g} + \frac{1}{3} \left( t - \frac{1}{2} \right) \Delta x \frac{\partial^2 u_g}{\partial x_d^2} \quad (10)$$

ここで， $Sh(=U/c)$  はストローハル数であり，下付き添え字  $\mathbf{g}, \mathbf{d} = x, y$  は，デカルト座標を表し，総和規約に従うものとする．式(9)および(10)は，それぞれ非圧縮性流体の連続の式，ナビエ・ストークス方程式に対応している．また，流体の動粘性係数  $\mathbf{n}$  は，次式で与えられることがわかる．

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3} \left( t - \frac{1}{2} \right) \Delta x \quad (11)$$

なお高レイノルズ数の計算には，数値安定性を保つため，稲室が提案した Lattice Kinetic スキーム<sup>(6)</sup>を用いた．

## 2.2 差分法

FDM における無次元量の定義は，以下のとおりである．

$$\left. \begin{aligned} t^* &= tU/L, & x^* &= x/L, \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}/U, & p^* &= (p - p_0)/(r_0 U^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに， $p_0$  は基準圧力である．これらの無次元量を用いると，支配方程式は

$$\frac{\partial u_g^*}{\partial x_d^*} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_g^*}{\partial t^*} + u_d^* \frac{\partial u_g^*}{\partial x_d^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_g^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_g^*}{\partial x_d^{*2}} \quad (14)$$

となる．ここで， $\mathbf{g}, \mathbf{d} = x, y$  であり，総和規約に従う．また， $Re$  はレイノルズ数を表す．

本研究では，SIMPLER 法<sup>(7)</sup>に基づく FDM を用いて計算を行った．なお移流項の離散化には，Fromm らによる四次ゼロ平均位相誤差差分法<sup>(8)</sup>を用いている．また，多孔質内流れの解析においては圧力の振動を防ぐためにスタッガード格子を用いた．

## 3 数値計算例

### 3.1 キャピティ内流れの計算例

Figure 1 に示すベンチマーク問題としてよく用いられる正方形キャピティ内の粘性流問題を考え LBM と FDM を用いて計算を行った．まず LBM を用いて，辺 CD 上の速さ  $U_{\max}$  および動粘性係数  $\mathbf{n}$  を変化させることによって， $Re = U_{\max} / \mathbf{n} = 1,000$  までの計算を行った．ここで，代表長さは 1 としている．領域の境界には，すべりなし境界条件<sup>(9)</sup>を用いた．また，初期条件はキャピティ内で  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ， $p = 1/3$  とした．次に，FDM を用いて同様の問題の計算を行った．FDM の境界条件としては， $U_{\max} = 1$  とし，全ての壁上で  $\partial p^* / \partial n = 0$  ( $\partial / \partial n$  : 法線方向の微分) とした．また，初期条件は， $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ ， $p^* = 0$  とした．なお，時間刻み  $\Delta t$  には，計算が安定に行える範囲の最適値を用いた．収束判定条件には，LBM と FDM のいずれにおいても，相対速度変化率  $\mathbf{d}$  を使い，次式を満足するまで計算を繰り返し行った．

$$\mathbf{d} = \text{Max} \left| \frac{u_g^{m-1} - u_g^m}{u_g^m} \right| \times 100 \leq 0.01 \quad (\%) \quad (15)$$

ここで， $\text{Max}$  は領域全体における最大値を表す．なお，式(15)は次式を満足するような速度  $u_g$  に適用する．

$$\left| u_g^m \right| \geq \text{Max} \left| u_g^m \right| \times 0.01 \quad (16)$$

計算結果の一例として， $Re=100$  および 1,000 のときの各計算パラメータ，計算終了時の Loop 数，および計算時間を Table 1 に示す．ここで，計算時間には CPU Time を用いた．いずれの場合も相対速度変化率  $\delta$  は収束判定を満足しており，流れは定常になっていることが確認された． $Re=100$  および  $Re=1,000$  での LBM および FDM による流速ベクトルならびに圧力線図を Figs. 2 - 5 に示す．

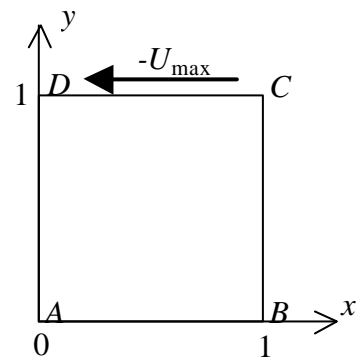


Fig. 1 Computational domain

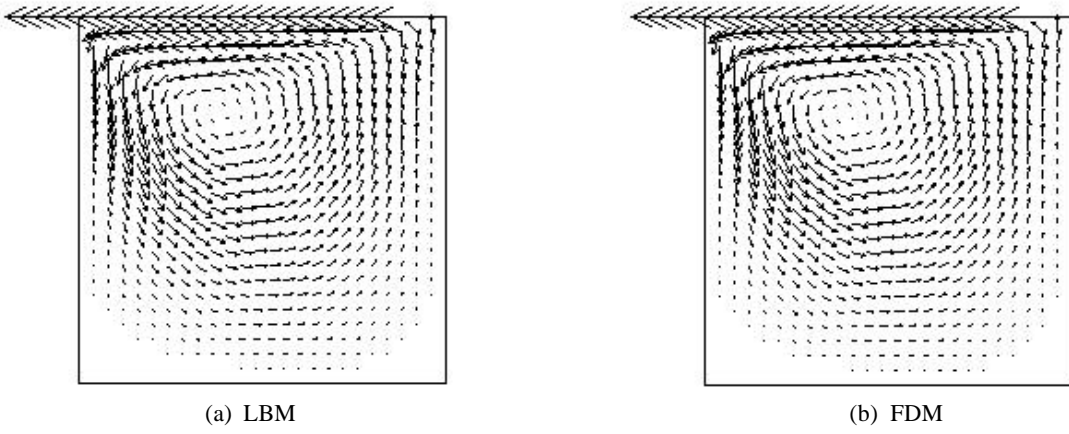


Fig. 2 Velocity vectors for  $Re=100$

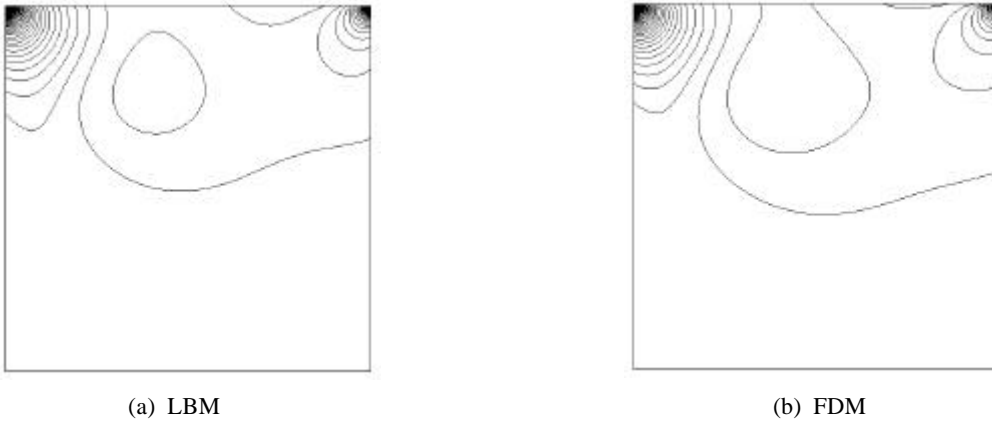


Fig. 3 Pressure field for  $Re=100$

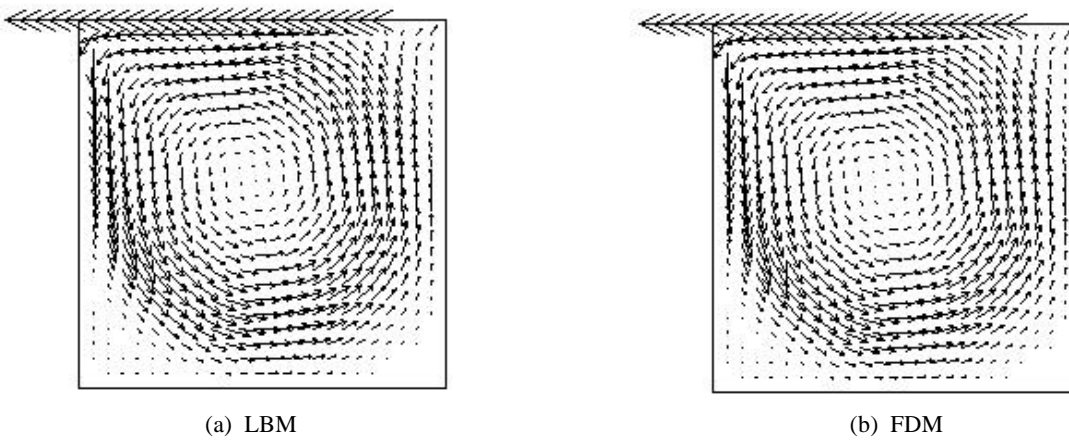


Fig. 4 Velocity vectors for  $Re=1000$

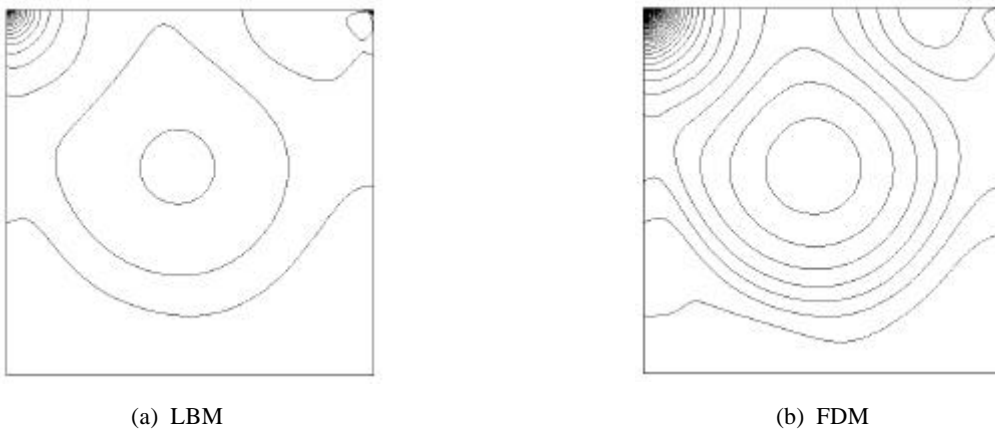


Fig. 5 Pressure field for  $Re=1000$

Table 1 Comparison between the LBM and the FDM

Re	Method	Meshes	Time Step	Loop	CPU Time
100	LBM	100 × 100	$2.5 \times 10^{-3}$	7710	0:3:19
	FDM	100 × 100	$2.0 \times 10^{-3}$ ( $5.0 \times 10^{-3}$ )	5183	0:3:49
1000	LBM	200 × 200	$5.0 \times 10^{-4}$	53650	1:24:13
	FDM	200 × 200	$2.0 \times 10^{-3}$ ( $5.0 \times 10^{-3}$ )	17292	0:57:44

注 Time Step における()内は、発散  $\Delta t$  を表す

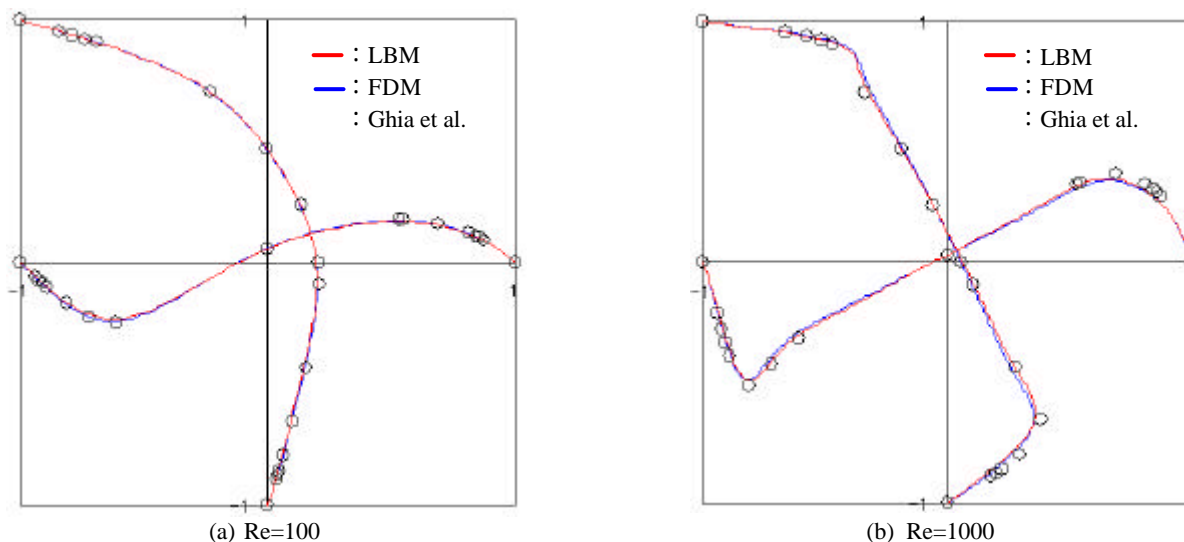


Fig. 6 Velocity distribution

LBM と FDM による結果を比較すると、流速ベクトルではいずれのレイノルズ数においても、両者はよく一致している。また、圧力線図では若干、中央における等圧線の数異なるものの、圧力の傾向はよく一致している。次に中心速度線図を Fig 6 に示し、Ghia ら<sup>(10)</sup>の結果と比較した。ここで、赤線が LBM、青線が FDM、黒線が Ghia らの計算結果である。これらより、LBM および FDM による結果は両方とも、Ghia らの結果とよく一致していることがわかる。また、LBM の線と FDM の線とが重なっており FDM と同程度の精度といえよう。但し、計算時間については、Table 1 に示されるように、Re=100 においては FDM と同等であるが、レイノルズ数が Re=1,000 のときには LBM は FDM の計算時間に比べて約 1.5 倍となった。

### 3.2 多孔質内流れの計算例

Figure 7 に示す二次元多孔質内流れ問題を考える。全領域を  $150 \times 100$  個の正方形格子に分割し、領域の内部に種々の形状の角柱を 11 個置いた。空隙率は 0.813 である。まず、LBM を用いて、流入部の速さ  $U_{in}$  および動粘性係数を変化させることによって  $Re = U_{in} / \nu = 10$  および 200 の計算を行った。ここで、流入部の長さを代表長さとし、1 とした。境界条件としては、内部の物体上では、すべりなし境界条件<sup>(9)</sup>を用いた。流入部では  $u_x = U_{in}$  の一様流とし、流出部では  $\partial p / \partial n = 0$  とした。また、上下の境界においては周期境界条件を用いている。一方、初期条件は、領域内で  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,

$p = 1/3$  とした。

次に FDM を用いて、同様の計算を行った。境界条件は、壁上で  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ ,  $\partial p^* / \partial n = 0$ 。流入部では  $u_x^* = U_{in}^*$  の一様流および  $\partial p^* / \partial n = 0$ 、流出部では  $\partial p^* / \partial n = 0$ 、上下の境界は周期境界条件とした。また、初期条件は  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ ,  $p^* = 0$  とした。なお、LBM と FDM のいずれにおいても、(15)式の相対速度変化率が  $d \leq 0.1$  まで繰り返した。

Re=10 と 200 での流速ベクトル図と圧力線図を Figs. 8-11 に、計算パラメータ、LOOP、CPU Time を Table 2 に示す。Re=10 での計算結果は LBM、FDM とともに流れの変化が少なく、比較的流れは穏やかである。また、圧力についても穏やかな圧力分布を示している。Re=200 においては Re=10 の計算結果に比べ、LBM および FDM の角柱の端点部分で、剥離が大きくなっていることがわかる。従って、圧力は Re=10 に比べ角柱の端点で圧力集中が大きくなっている。このように複雑な流れとなっているために、圧力は Re=10 に比べより複雑であることがわかる。また、Figs. 8-11 より FDM と LBM とは Re=10 および 200 において互いに似た傾向の結果が得られたことがわかる。次に所要計算時間の比較では Re=200 の場合、LBM は FDM に比べて 3 倍程度計算時間が少なくなっている。これは FDM では複雑な圧力場のため、圧力の緩和に時間がかかったためと思われる。一方、LBM についてはレイノルズ数が変化しても計算時間に変化はあまり見られなかった。

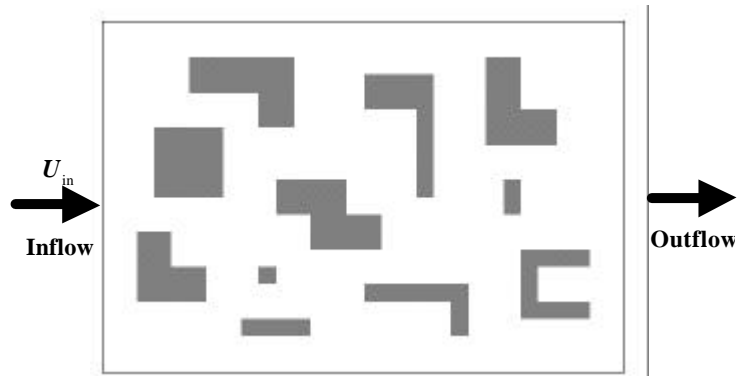
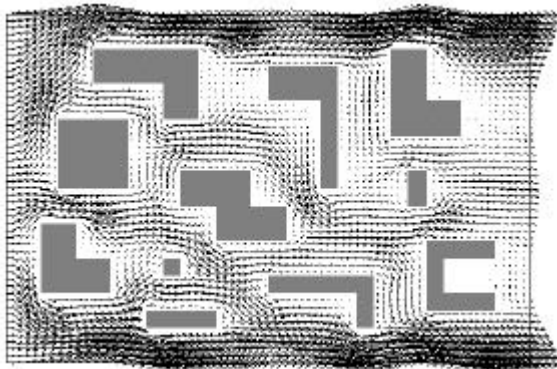
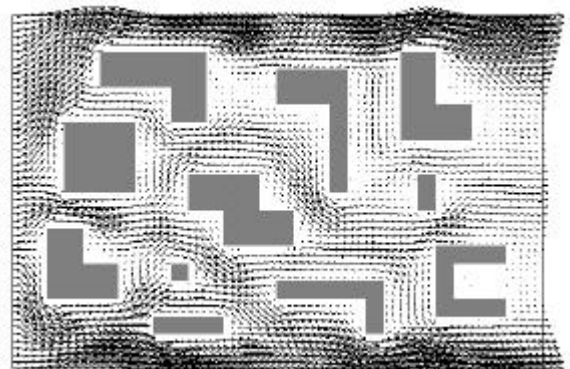


Fig. 7 Two-dimensional porous structure

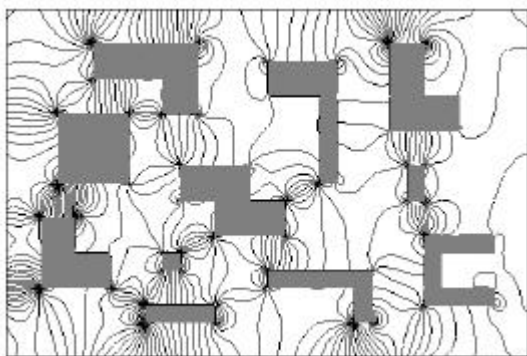


(a) LBM

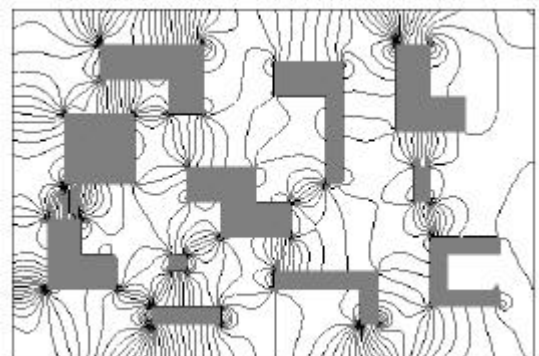


(b) FDM

Fig. 8 Velocity vectors for Re=10

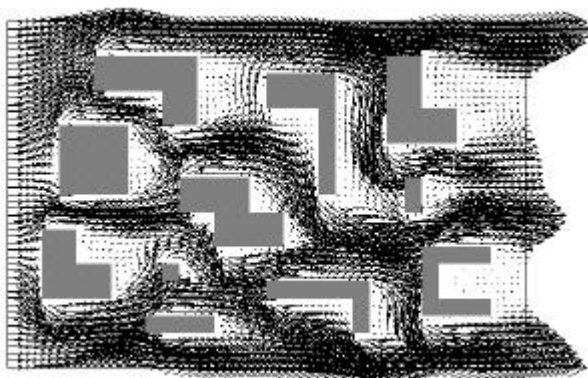


(a) LBM

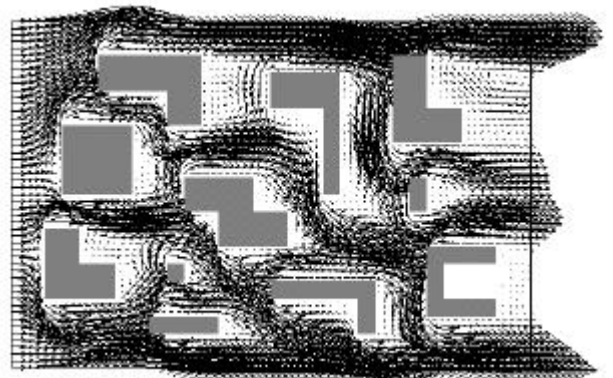


(b) FDM

Fig. 9 Pressure field for Re=10 ( $dp = 3.41 \times 10^{-4}$ , and  $dp$  is a contour interval.)

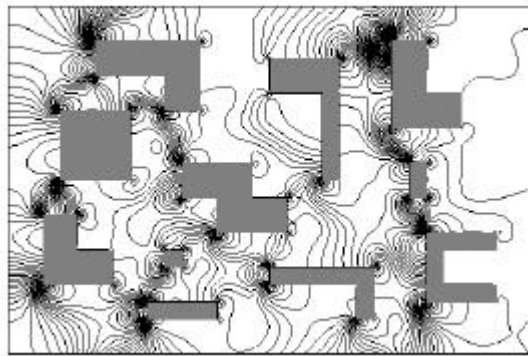


(a) LBM

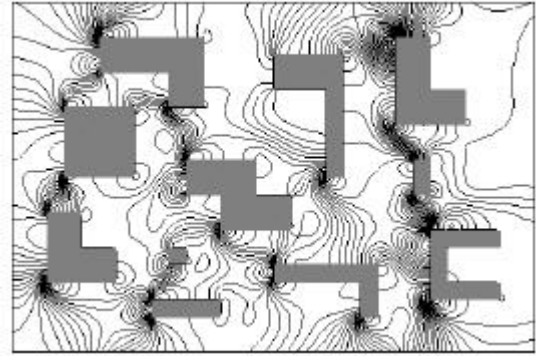


(b) FDM

Fig. 10 Velocity vectors for Re=200



(a) LBM



(b) FDM

Fig. 11 Pressure field for  $Re=200$  ( $dp = 2.88 \times 10^{-4}$ , and  $dp$  is a contour interval.)

Table 2 Comparison between the LBM and the FDM

Re	Method	Meshes	$U_{in}$	Time Step	Loop	CPU Time
10	LBM	$150 \times 100$	0.015	$1.5 \times 10^{-4}$	6790	0:45:42
	FDM	$150 \times 100$	0.015	$1.5 \times 10^{-3}$ ( $3.0 \times 10^{-3}$ )	9001	1:4:13
200	LBM	$150 \times 100$	0.03	$3.0 \times 10^{-4}$	7370	0:49:36
	FDM	$150 \times 100$	0.03	$1.5 \times 10^{-3}$ ( $3.0 \times 10^{-3}$ )	25072	2:43:53

注 Time Step における()内は、発散  $\Delta t$  を表す

#### 4 結言

LBM と FDM を用いて二次元キャピティ内流れおよび二次元多孔質内流れ問題の解析を行い、計算時間ならびに計算精度の比較を行った。その結果、以下のような結論を得た。

1. キャピティ内流れ問題において、同程度の精度を得るために、低レイノルズ数( $Re=100$ )の場合には FDM と同程度の計算時間であり、高レイノルズ数( $Re=1,000$ )の場合には約 1.5 倍の計算時間であった。
2. 多孔質内流れ問題においては、低レイノルズ数( $Re=10$ )の場合においては、FDM との計算時間の差は少なかったが、高レイノルズ数( $Re=200$ )では、LBM の計算時間は FDM の約 1/3 倍程度であった。この原因として、FDM では圧力の緩和に時間がかかるためと思われる。
3. 多孔質内流れ問題において、LBM はレイノルズ数の変化に関する計算時間への影響は少なかった。
4. これらの結果から、LBM は多孔質内の流れ解析などの複雑な境界をもつ流れの解析に効果的である。

#### 参考文献

- (1) McNamara, G. and Zanetti, G., "Use of the lattice Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata," Phys. Rev. Lett., **61**(1988), pp. 2332-2335.
- (2) Ferziger, J. H. and Peric, M., "Computational methods for fluid dynamics," Springer, New York, (1996).
- (3) Inamuro, T., Yoshino, M. and Ogino, F., "Accuracy of the lattice Boltzmann method for small Knudsen number with finite Reynolds number," Phys. Fluids, **9**(1997), pp. 3535-3542.

- (4) Qian, Y. H., d'Humieres, D., and Lallemand, P., "Lattice BGK models for Navier-Stokes equation," Europhys. Lett., **17** (1992), pp. 479-484.
- (5) Sone, Y., "Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary," In Rarefied Gas Dynamics (ed. D. Dini), Vol. 2, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa., (1971), pp. 737-749.
- (6) Inamuro, T., "A lattice kinetic scheme for incompressible viscous flows with heat transfer" Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser., A(2001), (in press).
- (7) Patankar, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow," McGraw-Hill, New York, (1980)
- (8) Fromm, J. E., "Practical investigation of convective difference approximations of reduced dispersion," The Phys. Fluids Suppl., (1969), pp. - 3- - 12
- (9) Inamuro, T., Yoshino, M. and Ogino, F. "A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations," Phys. Fluids, **7**(1995), pp. 2928-2930, Erratum, **8**(1996), p. 1124.
- (10) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method," J. Comput. Phys., **48**(1982), pp. 387-411.