

円筒座標系に於けるエネルギー保存差分スキーム

Energy-conservative finite-difference scheme for cylindrical coordinates

深淵康二, 産総研, つくば市並木 1-2, E-mail: fukagata@thtlab.t.u-tokyo.ac.jp

笠木伸英, 東大工, 文京区本郷 7-3-1, E-mail: kasagi@thtlab.t.u-tokyo.ac.jp

Koji Fukagata, Institute for Energy Utilization, AIST, Namiki 1-2, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8564, Japan

Noduhide Kasagi, Dept. of Mech. Eng., The Univ. of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

A highly energy-conservative second-order accurate finite-difference method for the cylindrical coordinate system is developed. The resulting form of energy-conservative discretized advection term is shown to be different from an intuitive one even for an equally-spaced mesh. This situation differs from the case of the Cartesian coordinates. A numerical test demonstrates that the scheme proposed in the present study has much higher energy conserving property than previous methods, both for equally-spaced and unequally-spaced meshes.

1. 緒言

計算機性能の飛躍的な向上に伴い, 乱流の直接数値シミュレーション(DNS)やラーゼ・エディ・シミュレーション(LES)は乱流の研究にとってますます重要なツールになりつつある⁽¹⁻⁴⁾が, 一様等方乱流やチャンネル流等, 擬スペクトル法⁽⁵⁾が使える特殊な場合を除き, これらの計算は差分法や有限要素法で行われることになる.

非圧縮性流れの差分法において最も重要な要求条件は, 連続空間で成り立つ流束・エネルギー保存が離散空間においても成り立つことである. これらの保存性が十分に満足されないと, 最悪の場合には計算は不安定になり結局発散してしまう. このため, 差分法によって離散化された Navier-Stokes 方程式の移流項の保存特性については, 古くから研究がなされてきた^(6,7). 離散空間で完全にエネルギーを保存するスキームとしては, 長い間デカルト座標系等間隔スタガード格子上の二次精度中心差分が存在するのみであったが, 近年になってようやく高次精度差分^(8,9)や不等間隔スタガード格子上の二次中心差分⁽¹⁰⁾に対してエネルギー保存スキームの拡張が行われた.

差分法を用いた円筒座標系での DNS 及び LES は過去にいくつか報告されており, 主に中心軸における特異点の処理方法の違いにより数種類の異なる手法が提案されている. Eggels ら⁽¹¹⁾及び Akselvoll-Moin⁽¹²⁾はスタガード格子及び二次中心差分を用いているが, 中心軸上で定義される半径方向速度 u_r についてはそれを挟む二点での u_r の値を平均した仮想速度を用いている. Verzicco-Orlandi⁽¹³⁾, Orlandi-Fatica⁽¹⁴⁾及び佐竹-功刀⁽¹⁵⁾は u_r の代わりにフラックス $q_r = ru_r$ を基本変数として持ち, 中心軸上で u_r の計算を回避している. またごく最近では特異点周りの級数展開に基づく, 高次差分法に適した方法が Constantinescu-Lele⁽¹⁶⁾により提案されている.

これら一連の円筒座標系における差分法に関する研究で, 上述のエネルギー保存性については, Orlandi-Fatica⁽¹⁴⁾が完全に発達した円管内乱流の瞬時場を初期場とする非粘性 ($Re \rightarrow \infty$) 流れにおいて全エネルギーがある程度保たれるのを示したのみで, 理論的な議論や異なるスキーム間の比較はなされていない. そこで本研究では, 2次精度中心差分により離散化された移流項のエネルギー保存特性についての考察より, 等間隔及び不等間隔格子においてエネルギー保存に優れた円筒座標スタガード格子系二次精度差分スキームを提案し, 数値実験により従来のスキームとの比較を行う.

本論文の構成は以下の通りである. 第2節で差分化された移流項のエネルギー保存特性について論じ, エネルギー保存

に優れた差分スキームを提案する. 続く第3節では提案されたスキームを数値実験により検証する. 最後に第4節において結論を示す.

2. 円筒座標系エネルギー保存移流項差分スキーム

円筒座標系における等温・非圧縮流れの基礎式は以下のよう to 与えられる.

連続の式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

運動量保存式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} = h_r + b_r + d_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = h_\theta + b_\theta + d_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = h_z + d_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (2)$$

ここで h_i は移流項を表わし, 具体形は

$$\begin{cases} h_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta u_r) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_r) \\ h_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta u_\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_\theta) \\ h_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r u_z) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta u_z) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_z) \end{cases} \quad (3)$$

と書ける. また, b_i および d_i はそれぞれ体積力 (遠心力 / コリオリ力) 項及び拡散項を表す. 本研究では Fig. 1 に示すような円筒座標系スタガード格子を用いて離散化することを考える. DNS 及び LES で通常用いられているように, 周方向及び長さ方向には等間隔格子, 半径 (壁垂直) 方向には等間隔もしくは不等間隔格子を用いることとする.

まず、半径方向の移流項 h_r は流束保存を満たすように離散化され、

$$h_{r,i+1/2,jk} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{(ru_r)_{i+1,jk} u_{r,i+1,jk} - (ru_r)_{ijk} u_{r,ijk}}{\Delta r_{i+1/2,jk}} \quad (4)$$

$$- \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{u_{\theta,i+1/2,j+1/2,k} u_{r,i+1/2,j+1/2,k} - u_{\theta,i+1/2,j-1/2,k} u_{r,i+1/2,j-1/2,k}}{\Delta \theta}$$

$$- \frac{u_{z,i+1/2,jk+1/2} u_{r,i+1/2,jk+1/2} - u_{z,i+1/2,jk-1/2} u_{r,i+1/2,jk-1/2}}{\Delta z}$$

となる。ここで $\Delta r_{i+1/2}$ は Fig. 2 で定義されているような格子間隔である。この離散式にはまだ $u_{r,ijk}$ などといった定義されていない中間点での速度が含まれているため、これらを定義されている速度から内挿して求める必要がある。そのためには通常、算術平均あるいは線形内挿が用いられることが多い。

しかし、デカルト座標系不等間隔スタガード格子の場合に不等間隔格子を等間隔格子からの写像と考え、不等間隔格子上で離散式を一般座標系強保存型差分の形で表した梶島⁽¹⁰⁾の解析によると、これら算術平均あるいは線形内挿は移流項の離散空間におけるエネルギー（厳密には速度二乗量）保存性を破ってしまい、また、離散空間においてもエネルギー保存を満たす差分スキームは正しい補間の組合せ（体積流束平均と算術平均）によってしか構築できないことが分かっている。

このデカルト座標系における解析で得られた知見を円筒座標系に適用すると、正しい補間の組合せを施した後の移流項の離散式は以下のように書くことができる。

$$h_{r,i+1/2,jk} = - \frac{1}{r_{i+1/2}} \left[\frac{(ru_r)_{i+1,jk} u_{r,i+1,jk} - (ru_r)_{ijk} u_{r,ijk}}{\Delta r_{i+1/2}} \right]$$

$$- \frac{1}{r_{i+1/2} \Delta \theta} \left[\left(\frac{\Delta r_{i+1} u_{\theta,i+1,j+1/2,k} + \Delta r_i u_{\theta,ij+1/2,k}}{2 \Delta r_{i+1/2}} \right) u_{r,i+1/2,j+1/2,k}^j \right. \quad (5)$$

$$\left. - \left(\frac{\Delta r_{i+1} u_{\theta,i+1,j-1/2,k} + \Delta r_i u_{\theta,ij-1/2,k}}{2 \Delta r_{i+1/2}} \right) u_{r,i+1/2,j-1/2,k}^j \right]$$

$$- \frac{1}{\chi_{i+1/2} \Delta z} \left[\left(\frac{r_{i+1} \Delta r_{i+1} u_{z,i+1,jk+1/2} + r_i \Delta r_i u_{z,ijk+1/2}}{2 r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}} \right) u_{r,i+1/2,jk+1/2}^{-k} \right.$$

$$\left. \left(\frac{r_{i+1} \Delta r_{i+1} u_{z,i+1,jk-1/2} + r_i \Delta r_i u_{z,ijk-1/2}}{2 r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}} \right) u_{r,i+1/2,jk-1/2}^{-k} \right]$$

ここで上線は算術平均による補間を、上添字は補間の方向を表す。また、 z 方向差分の項に現れる χ は

$$\chi_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} \Delta r_{i+1} + r_i \Delta r_i}{2 r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}} = 1 + \frac{\Delta r_{i+1} - \Delta r_i}{2 r_{i+1/2}} \quad (6)$$

と定義される因子であり、重みの和が 1 となるよう導入されたものである。この因子は等間隔格子の場合はもちろん 1 であるが、不等間隔格子の場合でも中心軸近傍での変化が小さければおおよそ 1 であると考えられる。また、このような因

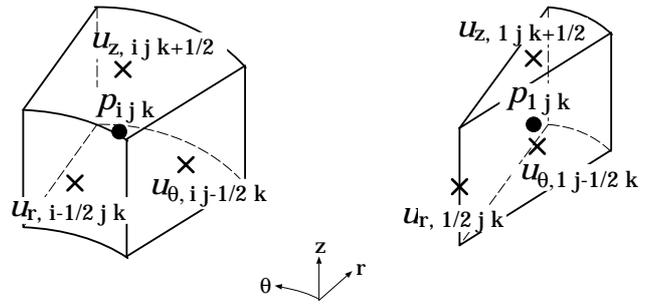


Fig. 1 Definition points of velocities and pressure.

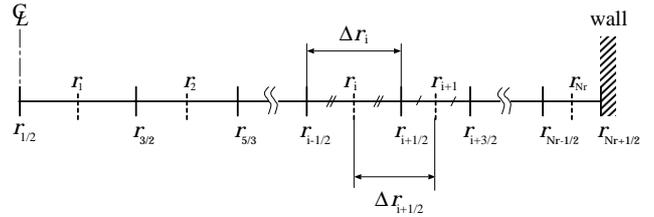


Fig. 2 Definition of notations for position and spacing in the radial direction.

子を導入した理由は、式(5)の各項の分母に共通して径方向位置および格子間隔に依存する $r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}$ が含まれる形にするためである。

式(5)において、不等間隔格子による重みが線形内挿のものと逆になっている点はデカルト座標系の場合⁽¹⁰⁾と同様であるが、等間隔格子の場合でも式(5)は算術平均による内挿を施したものは一致せず、距離 r に依存する重みが残ることがデカルト座標系の場合と大きく異なる点である。

このようにして得られた離散式が速度二乗量保存を満たすことは以下のようにして確かめられる。まず、中間点における速度二乗量を Piacsek-Williams⁽⁶⁾に倣って、

$$(u_r^2)_{ijk} = u_{r,i+1/2,jk} u_{r,i-1/2,jk} \quad (7)$$

$$(u_r^2)_{i+1/2,j+1/2,k} = u_{r,i+1/2,j+1/2,k} u_{r,i+1/2,jk}$$

$$(u_r^2)_{i+1/2,jk+1/2} = u_{r,i+1/2,jk+1/2} u_{r,i+1/2,jk}$$

などと定義し、式(5)において、輸送される速度を速度二乗量に置き換えることにより、速度二乗量の移流項 $H_{r,i+1/2,jk}$ を求めることができる。一方、実際の計算において速度の移流の結果として発生する速度二乗量の輸送は、式(5)にを掛けたもの、即ち $2u_{r,i+1/2,jk} h_{r,i+1/2,jk}$ である。したがってこれらが一致すれば速度の移流項は速度二乗量を保存すると言える。式(6)で定義される因子を $\chi=1$ と近似（ただし、等間隔格子の場合は厳密に $\chi=1$ である）した上でこれらの差を取ってみると、

$$2(u_r h_r)_{i+1/2,jk} - H_{r,i+1/2,jk} = - \frac{r_{i+1} \Delta r_{i+1} u_{r,i+1/2,jk}^2}{2 r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}} (D \cdot \vec{u})_{i+1,jk} \quad (8)$$

$$- \frac{r_i \Delta r_i u_{r,i+1/2,jk}^2}{2 r_{i+1/2} \Delta r_{i+1/2}} (D \cdot \vec{u})_{ijk}$$

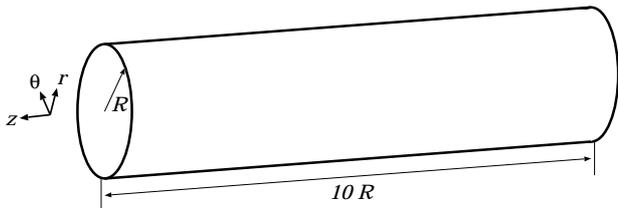


Fig. 3 Geometry of the computational domain.

となる事が分かる。ここに \mathcal{D} は二次中心差分で離散化された発散オペレータである。これより、評価点を挟む2つのセルにおいて離散化された連続の式 $\mathcal{D} \cdot \vec{u} = 0$ が成り立つならば、速度二乗量の移流項 $H_{r,i+1/2,jk}$ と速度の移流によって発生する速度二乗量の輸送 $2u_{r,i+1/2,jk} h_{r,i+1/2,jk}$ は等しくなり、離散空間でもエネルギーが保存されることが確かめられた。

上式の導出においては $\chi = 1$ と近似したため、不等間隔格子においての速度二乗量保存は厳密には完全とは言えないが、この近似のエネルギー保存性に対する影響が小さいことは次節の数値実験によって示す。等間隔格子に対しては式(5)が速度二乗量保存を完全に満たす離散化法であることには変わりはない。また、従来の算術平均や線形補間をスキームを用いた場合はもちろん、不等間隔格子において式(6)に定義される因子 χ を導入しない表現では、式(8)のようにすっきりとした形でエネルギー保存性を表すことができない。

周方向および流れ方向の移流項 h_θ , h_z についても同様にして離散化式を求められるが、これらの方向に等間隔格子を用いる場合には、従来通り算術平均に基づいたものになる。

3. スキームの検証

移流項に対するエネルギー保存スキームは数値実験によって検証された。数値実験としては Fig. 3 に示すように周期境界条件を課した半径 $R = 1$ 、長さ $10R$ の円筒形計算領域を考え、非圧縮、非粘性 ($Re \rightarrow \infty$) 流れ、即ち式(3)において拡散項 $d_i = 0$ としたもののシミュレーションを行った。初期速度場としては、完全に発達した円管内乱流 ($Re_\tau = 180$) の計算で得られた瞬時速度場を本数値実験で用いられる粗い格子に間引いた後、連続の式を満足し、平均流速 0、エネルギー $\langle k \rangle = 1$ となるよう正規化したものを用いた。この問題では物理的な生成・散逸は起こらないので、計算においても離散化誤差及び時間積分に伴うエネルギー変化を抑えることが望ましい。

計算格子には径方向 (r)、周方向 (θ)、長さ方向 (z) に $12 \times 16 \times 32$ の等間隔あるいは不等間隔スタガード格子を用い、時間積分に用いる刻み幅を $\Delta t = 0.001$ とした。離散化された方程式の時間積分は3次精度省メモリ型 Runge-Kutta 法⁽¹⁷⁾、及び型フラクショナルステップ法⁽¹⁸⁾による圧力カップリングによって行ったが、ここで用いられている時間刻み幅とその1/10の時間刻み幅の結果の比較より、時間積分法による誤差は十分小さいことが確認されている。

また、ここでは移流項についてのみ考察するが、遠心力/コリオリ力項の離散化、及び特異点の処理もエネルギー保存性に関わる要素である。従って、これらに対してもエネルギー保存性に優れたスキーム⁽¹⁹⁾及び従来のスキームを用いて数値実験を行ったが、本数値実験においてはこれらの離散化

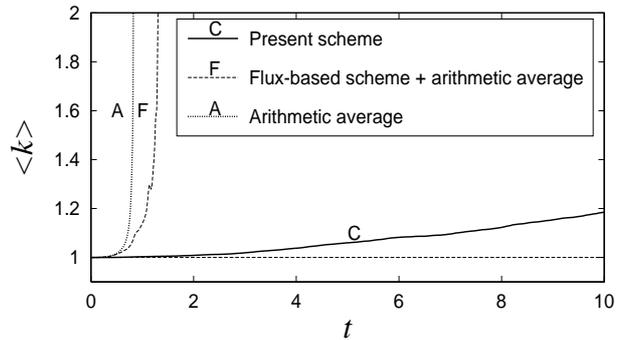


Fig. 4 Time trace of kinetic energy in the case of equally-spaced mesh.

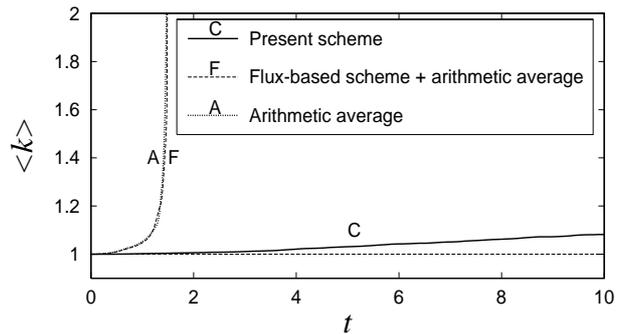


Fig. 5 Time trace of kinetic energy in the case of unequally-spaced mesh.

における差異の影響は移流項のそれに比べて十分小さいことが確かめられている。

まず等間隔格子 ($\Delta r = 0.083$, $\Delta \theta = 0.39$ rad., $\Delta z = 0.31$) の場合の結果として、移流項に三種類の異なるスキームを用いた場合の $\langle k \rangle$ の時間変化を Fig. 4 に示す。算術平均に基づく直観的なスキームや特異点の処理を必要としない Flux-based scheme⁽³⁾ (補間は算術平均) を用いた場合には初期より $\langle k \rangle$ の増加が顕著であり、時間 $t < 2.5$ の間に発散してしまうのに対し、本研究で提案されたスキームは、格段に良いエネルギー保存特性を持ち、そのため長時間の積分のもとでも計算が発散しないことが分かる。また、ここで用いられている特異点の処理方法によるエネルギー保存の崩れが若干残っている⁽¹⁹⁾ため、エネルギー保存スキームを用いた場合でも次第にエネルギーの増加が起こってしまうが、計算の発散までに要した時間は $t = 66$ と、従来のスキームよりも1オーダー以上長かった。

続いて、不等間隔格子の場合の結果を Fig. 5 示す。格子数は上述の等間隔格子の場合と同数で、壁 ($r = 1$) 近傍で密になるように寄せられている。式(6)で定義される因子は $0.83 < \chi < 1$ であり、1に対して割と大きなずれを持っている。しかしそれに関わらず、等間隔格子の場合と同様、本研究で提案された離散化式(式(5))は従来の手法に比して格段に高いエネルギー保存特性を示している。

4. 結論

円筒座標系スタガード格子を用いた2次精度中心差分法における移流項のエネルギー保存性について考察を行った。離散空間でエネルギー(速度二乗量)保存を満たす離散式は、デカルト座標系の場合⁽¹⁰⁾と同様、適切な補間の組み合わせ

せによって構築することができ、離散化された連続の式が成り立つならば離散空間でもエネルギーが保存されることが理論的に確かめられた。しかしながら、デカルト座標系の場合とは異なり、円筒座標系の場合は等間隔格子においても算術平均に基づく素朴なスキームとエネルギー保存スキームは一致せず、中心軸からの距離 r に依存する重みが残ることが示された。また、本研究で提案された移流項差分スキームは、数値実験によっても検証され、従来のスキームに比べて高いエネルギー保存特性及び数値安定性を持つことが示された。

謝辞

本研究は、文部科学省開放的融合研究推進制度の援助を受けた。また、円管内乱流 DNS コードの開発に際して、富山大学工学部、佐竹信一博士には貴重なご助言をいただいた。記して謝意を表する。

参考文献

- (1) Lesieur, M. and Métais, O., "New trend in large-eddy simulation of turbulence," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28** (1996), pp. 45-82.
- (2) Piomelli, U., "Large-eddy simulation: where we stand," In *Advanced in DNS/LES* (Eds. Liu et al.), Greyden Press (1997), pp. 93-104.
- (3) Kasagi, N., "Progress in direct numerical simulation of turbulent transport and its control," *Int. J. Heat. Fluid Flow* **19** (1998), pp. 125-134.
- (4) Moin, P. and Mahesh, K., "Direct numerical simulation: a tool in turbulence research," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998), pp. 539-578.
- (5) Gottlieb, D. and Orszag, S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM (1977).
- (6) Harlow, F. H. and Welch J. E., "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flows of fluid with free surface," *Phys. Fluids* **8** (1965), pp. 2182-2189.
- (7) Piacsek, S. A. and Williams, G. P., "Conservation properties of convection difference schemes," *J. Comput. Phys.* **6** (1970), pp. 392-405.
- (8) 森西, "非圧縮流体解析における差分スキームの保存特性 (第1報-第3報)," *機論 B 編* **62-604** (1996), pp. 4090-4112.
- (9) Morinishi, Y., Lund, T. S., Vasilyev, O. V. and Moin, P., "Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow," *J. Comput. Phys.* **143** (1998), pp. 90-124.
- (10) 梶島, "不等間隔に適合する対流項の差分法," *機論 B 編* **65-633** (1999), pp. 1607-1612.
- (11) Eggels, J.G.M., Unger, F., Weiss, M. H., Westelweel, J., Adrian, R. J., Friedrich, R. and Nieuwstadt, F. T. M., "Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment," *J. Fluid Mech.* **268** (1994), pp. 175-209.
- (12) Akselvoll, K. and Moin, P., *Large eddy simulation of turbulent confined coannular jets and turbulent flow over a backward facing step*, Stanford Univ. Report No. TF-63 (1995).
- (13) Verzicco, R. and Orlandi, P., "A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates," *J. Comput. Phys.* **123** (1996), pp 402-413.
- (14) Orlandi, P. and Fatica, M., "Direct simulation of turbulent flow in a pipe rotating about its axis," *J. Fluid Mech.* **343** (1997), pp. 43-72.
- (15) 佐竹, 功刀, "円管内乱流の直接数値計算," *機論 B 編* **64-617** (1998), pp. 65-70.
- (16) Constantinescu, G. S. and Lele, S. K., "A new method for accurate treatment of flow equations in cylindrical coordinates using series expansions," *Annual Research Briefs 2000*, Center for Turbulence Research (2000), pp. 199-211.
- (17) Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M., "Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions," *J. Comput. Phys.* **96** (1991), pp. 297-324.
- (18) Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S., "Approximate factorization as a higher-order splitting for the implicit incompressible flow equations," *J. Comput. Phys.* **102** (1992), pp. 336-347.
- (19) Fukagata, K. and Kasagi, N., "Highly energy-conservative finite difference method for cylindrical coordinate system," *J. Comput. Phys.* (投稿中).