

エネルギー伝達の局所スケール間平衡仮定より導出されたダイナミック SGS モデル Dynamic Subgrid Scale Model Deduced from Local Inter-Scale Equilibrium Assumption of Energy Transfer

室田 知也, 日立製作所, 〒312-0034 ひたちなか市堀口 832-2, E-mail: tomoya_murota@pis.hitachi.co.jp
Tomoya Murota, Hitachi, Ltd., 832-2 Horiguchi, Hitachinaka, Ibaraki 312-0034

Subgrid Scale (SGS) stress models of eddy viscosity type are the models only to mimic the energy dissipation from the grid-scale but to approximate the components of the SGS stress tensor. The Lilly's least square method is a standard dynamic procedure, but it does not guarantee the amount of the energy dissipation. So the application of this procedure to the SGS models of eddy viscosity type or of mixed type usually results in numerical instability or lack of the energy dissipation. In this paper a new dynamic procedure for the eddy viscosity model, which guarantees the amount of the energy dissipation, is proposed. This procedure is deduced from the assumption of "local inter-scale equilibrium", i.e., the balance of the energy transfer between the test-scale and the grid-scale. The eddy viscosity coefficient is calculated automatically using the information about the energy dissipation, which is obtained as the product of the test-scale strain rate tensor and the subtest scale stress tensor approximated directly using the Taylor series expansions. The validity of the proposed procedure is shown in the analysis of the plane channel flow.

1. はじめに

流体機器の開発では, 非定常乱流場が設計検討の対象となることが多く, 実用に堪える非定常乱流解析技術の確立が望まれている. こうしたニーズに応える解析手法として注目されるのが, Large-Eddy Simulation (LES) である.

LES の代表的なサブグリッドスケール(SGS)応力モデルである Smagorinsky の渦粘性モデル^[1]では, モデル定数の最適値が流動状況によって異なることが実用上の問題となる.

モデル定数の最適値に関する課題は, 流動状況に応じてモデル定数を自動的に算出するダイナミック SGS モデルにより克服されつつある. 今日では Smagorinsky モデルを対象とした Dynamic Smagorinsky モデル(DSM)^{[2][3]}以外にも, Dynamic Mixed モデル(DMM)^[4], Dynamic Two-parameter mixed モデル(DTM)^{[5][6][7]}など, 各種の SGS モデルを対象にダイナミック SGS モデルが提案されている. これらのダイナミック SGS モデルでは, モデル定数の算出に Lilly の最小自乗法^[3]を用いる.

Lilly の最小自乗法を用いるダイナミック SGS モデル全般の欠点の一つに, 数値的な不安定さがある. それを避けるため, 通常は Lilly の最小自乗法の適用時に流れの統計的一様方向への平均操作が導入される. しかし実際には統計的一様方向が存在しない場合もあるから, これはダイナミック SGS モデルを実用解析へ適用する際の障害となる. 流線方向を統計的一様方向とみなす Lagrangian Dynamic SGS モデル^[8]や, モデル定数もテストフィルタ操作の対象として数値安定性を確保し, 平均操作を不要とする Localized Dynamic SGS モデル^[9]等も提案されている. しかしより本質的な問題解決のためには, ダイナミック SGS モデルで数値不安定が生じる根本的な原因を除去すべきだと考える.

Lilly の最小自乗法を用いる DTM^[5]では, さらに別の問題も生じる. Two-parameter mixed モデルでは, スケール相似則モデル単独では不足するグリッドスケールからの運動エネルギーの散逸を補う目的で, Smagorinsky モデルを併用する. しかし DTM は, 併用した Smagorinsky モデル部自体のエネルギー散逸量を過小評価する傾向があり^[7], これが解析の精度に悪影響を及ぼす.

こうしてみると Lilly の最小自乗法を用いたダイナミック SGS モデルに関する問題点は, モデルのエネルギー散逸特性に関係していることがわかる. 平均操作無しのダイナミック SGS モデルで生じる数値振動は, グリッドフィルタの特性波

数近辺の高波数領域に, 運動エネルギーが蓄積される現象である. これは局所的に適切なエネルギー散逸が与えない結果だと考えられる. また DTM でも適切なエネルギー散逸量が得られていない. これらのことから Lilly の最小自乗法を用いる従来のダイナミック SGS モデルは, エネルギー散逸特性に関して適切な解法になっていないといえる.

そこで本報では, エネルギー散逸特性を満たすようにモデル定数を算出する, 新たなダイナミック SGS モデルを構築する.

2. 従来のダイナミック SGS モデル

2-1. LES の基礎方程式

LES で扱う非圧縮性流れの基礎式は, グリッドフィルタ操作を受けた連続の式と Navier-Stokes 方程式である.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \dots\dots\dots (2)$$

ここで u_i は速度の x_i ($i=1,2,3$) 方向成分, p は圧力を密度で除した値, $\sigma_{ij} \equiv 2\nu S_{ij}$ は粘性応力, ν は動粘性係数, S_{ij} は次式で定義される歪速度テンソルである.

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (3)$$

また $\tau_{ij} \equiv \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$ は SGS 応力であり, $\bar{\cdot}$ はグリッドフィルタ操作を示す. なお本報での数式の表記には, アインシュタインの総和規約が用いられる.

SGS 応力は, Eq.(2)を介してグリッドスケールの速度 $\bar{u}_i$ を変化させ, また同時にグリッドスケールの運動エネルギー $K_{gs} \equiv \bar{u}_k \bar{u}_k / 2$ も変化させる. K_{gs} の輸送方程式は次式であらわされる.

$$\frac{\partial K_{gs}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j K_{gs}}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{\partial \bar{u}_i \bar{p}}{\partial x_i}}_I + \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{III} \dots\dots\dots (4)$$

$\underbrace{-\epsilon_{gs}}_{IV} \quad \underbrace{-\epsilon_{gs} \rightarrow s_{gs}}_V$

$$\varepsilon_{gs} \equiv 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

$$\epsilon_{gs \rightarrow sgs} \equiv -\tau_{ij} \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (6)$$

Eq.(4)の右辺第 I,II,III 項は保存形式なので，系全体でのエネルギーの増減には直接は関与しない．右辺第 IV 項は粘性散逸項で，グリッドスケール運動エネルギーの一部は本項を介して熱エネルギーに変換される．右辺第 V 項はグリッドスケールからサブグリッドスケールへの運動エネルギーの伝達項である． $K_{sgs} \equiv (\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k) / 2 = \tau_{kk} / 2$ で定義されるサブグリッドスケール運動エネルギーの輸送方程式は，次式であらわされる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j K_{sgs}}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{p} - \bar{u}_i \bar{p}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij} - \bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij}) + \frac{\partial \bar{u}_i \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{K} - \bar{u}_j \bar{K}) \\ & - \varepsilon_{sgs} + \epsilon_{gs \rightarrow sgs} \end{aligned} \quad ** (7)$$

$$\varepsilon_{sgs} \equiv \bar{\varepsilon} - \varepsilon_{gs} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $K \equiv u_k u_k / 2$ は総運動エネルギーであり， $\varepsilon \equiv 2\nu S_{ij} S_{ij}$ は粘性散逸総量である．グリッドスケールから散逸したエネルギー $\epsilon_{gs \rightarrow sgs}$ は，Eq.(7)の右辺最終項を介してサブグリッドスケールに供給される．このように SGS 応力は，Eq.(4)の右辺第 V 項を介してグリッドスケール運動エネルギーを散逸させ，同量のエネルギーをサブグリッドスケールの運動エネルギーに供給する働きをもつ．

非圧縮性流れの LES で実際に計算するのは連続の式 Eq.(1) と Navier-Stokes 方程式 Eq.(2)であり，グリッドスケール運動エネルギーの輸送方程式 Eq.(4)が直接計算されることはない．しかし Eq.(4)中の SGS 応力によるエネルギー散逸挙動は，解析の精度と安定性に関して重要な役割をもつ．例えばエネルギー散逸量が過小評価された場合，グリッドフィルタの特性波数付近に運動エネルギーが蓄積される．その結果，非物理的な数値振動が誘起されて解析の安定な進行の妨げとなる．またエネルギー散逸量が過大評価されると，解析格子のサイズに見合うだけの，有効な解像度を持つ解は得られない．したがって SGS モデルには，SGS 応力テンソルの成分を高い精度で近似することと同時に，エネルギー散逸挙動を適切に模擬することが求められる．

2-2．SGS モデルの分類

SGS 応力のモデルは，モデル化する対象に応じて二種類に分類できる．一つはスケール相似則モデルのように，SGS 応力テンソルの個々の成分を直接近似するモデルである．もう一つはグリッドスケールからのエネルギー散逸挙動をモデル化するものであり，Smagorinsky モデル等の渦粘性モデルがこれに相当する．以下にこれら二種類の SGS モデルの概要を示す．

(1) SGS 応力成分の近似モデル

SGS 応力テンソルの個々の成分を直接近似する SGS モデルには，例えば次式で与えられる Bardina モデル^[10]がある．

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \dots\dots\dots (9)$$

Bardina モデルはスケール相似則モデルの一つであり，SGS

応力を修正 Leonard 項 $L_{ij}^m \equiv \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ ，修正 Cross 項 $C_{ij}^m \equiv (\overline{u_i u_j'} + \overline{u_j' u_i}) - (\bar{u}_i \bar{u}_j' + \bar{u}_j' \bar{u}_i)$ ，修正 Reynolds 項 $R_{ij}^m \equiv \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i' \bar{u}_j'$ に分解し， C_{ij}^m と R_{ij}^m を無視した形式となっている．ここで $u_i' \equiv u_i - \bar{u}_i$ である．

またグリッドフィルタを次式で近似し，

$$\bar{f} \simeq f + \frac{\Delta_g^2}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \dots\dots\dots (10)$$

これを Bardina モデルに代入して Δ_g に関する 4 次以上の項を無視すると，次の Clark モデル^[11]が得られる．

$$\tau_{ij} = \frac{\Delta_g^2}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \dots\dots\dots (11)$$

ここで Δ_g はグリッドフィルタの特性長さである．Clark モデルも SGS 応力テンソルの成分を近似する SGS モデルである．

このように SGS 応力成分の近似モデルでは，SGS 応力の分解やフィルタ特性長さに関する Taylor 展開等を用いて，SGS 応力テンソルの個々の成分を直接近似する．一般に SGS 応力成分の近似モデルは，グリッドスケールからのエネルギー散逸量を過小評価する傾向がある．

(2) エネルギー散逸量の近似モデル

一方，グリッドスケール運動エネルギーの散逸量を近似する SGS モデルに，渦粘性モデルがある．渦粘性モデルでは，SGS 応力が粘性応力 $\sigma_{ij} \equiv 2\nu S_{ij}$ と同様にエネルギー散逸効果をもつことから，粘性応力と類似の次式で SGS 応力を近似する．

$$\tau_{ij}^* \equiv \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_e \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (12)$$

ここで上付き添え字 “*” は，テンソルに対するトレースフリー操作をあらわす．渦粘性モデルでは，グリッドスケールからのエネルギー散逸特性が満たされるよう，適切に渦動粘性係数 ν_e を設定する必要がある．

代表的な渦粘性モデルである Smagorinsky モデル^[11]は，渦動粘性係数を次式で与える．

$$\nu_e = (C_S \Delta_g)^2 |\bar{S}| \dots\dots\dots (13)$$

ここで $|\bar{S}| \equiv \sqrt{2S_{ij} S_{ij}}$ ， C_S は Smagorinsky 定数である．

Smagorinsky 定数の理論値は，乱流場でのエネルギー散逸特性を考慮して次のように求められる．まず，サブグリッドスケール運動エネルギー K_{sgs} の輸送方程式 Eq.(7)において局所平衡を仮定する．このとき次式が成り立つ．

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{gs} \approx \epsilon_{gs \rightarrow sgs} \dots\dots\dots (14)$$

また $\bar{\varepsilon} \gg \varepsilon_{gs}$ を仮定し，さらにグリッドフィルタの特性長さ Δ_g が慣性小領域に含まれることを想定して，Kolmogorov の第二相似則，いわゆる「-5/3 乗則」を Eq.(14)に適用する．その結果，

$$C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_K} \right)^{3/4} \dots\dots\dots (15)$$

が得られる．ここで C_K は Kolmogorov 定数である． $C_K = 1.4$ とするとき， $C_S \approx 0.18$ である．しかし実際には流動状況に応じて C_S の最適値は異なり，例えばチャネル乱流では 0.1 程度

の値が用いられる．また，DSM，DMM，DTM 等のダイナミック SGS モデルでは， C_s の値は流動状況に応じて自動的に算出される．

2-3 . Lilly の最小自乗法

DSM，DMM，DTM 等のダイナミック SGS モデルでは，Germano 恒等式^[2]

$$\mathcal{L}_{ij}^G \equiv \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} \dots\dots\dots (16)$$

の右辺のサブテストスケール(STS)応力 $T_{ij} \equiv \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j$ ，および SGS 応力 τ_{ij} を SGS モデルで近似し，それぞれ T_{ij}^{model} ， τ_{ij}^{model} で与える．さらに Lilly の最小自乗法^[3]を適用することによってモデル定数を算出する．ここで $\widehat{}$ はテストフィルタ操作を示す．Lilly の最小自乗法は，次式で定義される残差テンソル

$$\gamma_{ij} \equiv \mathcal{L}_{ij}^G - T_{ij}^{model} + \hat{\tau}_{ij}^{model} \dots\dots\dots (17)$$

の成分の自乗和 $\gamma_{ij}\gamma_{ij}$ が最小となるように，モデル定数の値を決める．最小自乗法が必要となるのは，Germano 恒等式を構成する独立な式の数に対して SGS モデルのもつモデル定数の数が少ないためである．仮に SGS モデルが $C_1 \dots C_N$ の N 個のモデル定数をもつとき，次の連立一次方程式からこれらの値が求められる．

$$\frac{\partial \gamma_{ij}\gamma_{ij}}{\partial C_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, N) \dots\dots\dots (18)$$

このように Lilly の最小自乗法は，モデル化された SGS 応力 τ_{ij}^{model} が，テンソルレベルで Germano 恒等式をなるべく満たすようにモデル定数を決定する方法である．ここで注意すべき点は，Lilly の最小自乗法がエネルギー散逸量を近似するための方法ではない，ということである．したがって渦粘性モデル等のエネルギー散逸量の近似モデルにこの方法を適用しても，期待したほどの有効なエネルギー散逸量が得られない場合がある．

例えば Salvetti & Banerjee の DTM^[5]では，SGS モデルに Bardina モデルと Smagorinsky モデルを線形結合した次の Two-parameter mixed モデルを用いる．

$$\tau_{ij}^* = C_L L_{ij}^{m*} - 2(C_S \Delta_g)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (19)$$

これに Lilly の最小自乗法を適用すると，モデル定数 C_s と C_L が以下のように算出される．

$$(C_S \Delta_g)^2 = \frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{ij}^{G*} \mathcal{H}_{ij}^* \rangle \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{M}_{ij} \rangle - \langle \mathcal{L}_{ij}^{G*} \mathcal{M}_{ij} \rangle \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{H}_{ij}^* \rangle}{\langle \mathcal{M}_{ij} \mathcal{M}_{ij} \rangle \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{H}_{ij}^* \rangle - \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{M}_{ij} \rangle^2} \dots\dots (20)$$

$$C_L = \frac{\langle \mathcal{L}_{ij}^{G*} \mathcal{H}_{ij}^* \rangle \langle \mathcal{M}_{ij} \mathcal{M}_{ij} \rangle - \langle \mathcal{L}_{ij}^{G*} \mathcal{M}_{ij} \rangle \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{M}_{ij} \rangle}{\langle \mathcal{M}_{ij} \mathcal{M}_{ij} \rangle \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{H}_{ij}^* \rangle - \langle \mathcal{H}_{ij}^* \mathcal{M}_{ij} \rangle^2} \dots\dots (21)$$

$$\mathcal{M}_{ij} \equiv \alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (22)$$

$$\mathcal{H}_{ij} \equiv \left(\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j \right) - \left(\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \right) \dots\dots\dots (23)$$

$$\alpha \equiv \Delta_{gt} / \Delta_g \dots\dots\dots (24)$$

ここで Δ_{gt} は二重フィルタ $\widehat{}$ に関する特性長さである．また $\langle \rangle$ は計算の安定化のために導入された，統計的一様方

向への平均操作をあらわす．

Morinishi & Vasilyev^[7] は，ここに示した DTM の Smagorinsky モデル部が，十分なエネルギー散逸量を持たないことを指摘している．Two-parameter mixed モデルで Smagorinsky モデルを併用する目的は，Bardina モデル部単独では不足するエネルギー散逸量を補うことであるから，Lilly の最小自乗法ではその目的が果たせていない．

こうした Lilly の最小自乗法と Smagorinsky モデルの齟齬の原因は，Lilly の最小自乗法がエネルギー散逸特性と無関係な点にある．つまり，エネルギー散逸量の近似モデルである Smagorinsky モデルや渦粘性モデルでは，エネルギー散逸特性を十分に反映させてモデル定数を設定する必要があるが，Lilly の最小自乗法はそれを行うための方法ではない．したがって渦粘性モデルに関しては，Lilly の最小自乗法はモデル定数の自動算出方法として適切な方法ではない．渦粘性モデルを対象とした，エネルギー散逸特性を十分に考慮したモデル定数の自動算出方法の確立が望まれる．

3 . 新たなダイナミック SGS モデル

3-1 . 局所スケール間平衡仮定

ここで，運動エネルギーの波数空間上での伝達特性に関して検討する．従来のダイナミック SGS モデルと同様に，テストフィルタを導入する．その結果あらわれる STS 応力は，テストスケールからサブテストスケールへ運動エネルギーを伝達する．エネルギーの伝達量 $\epsilon_{ts \rightarrow sts}$ は

$$\epsilon_{ts \rightarrow sts} \equiv -T_{ij} \hat{S}_{ij} \dots\dots\dots (25)$$

である．つまり STS 応力は， $K_{ts} \equiv \hat{u}_k \hat{u}_k / 2$ で定義されるテストスケール運動エネルギーからエネルギーを $\epsilon_{ts \rightarrow sts}$ だけ散逸させ，それと同量のエネルギーをサブテストスケール運動エネルギー $K_{sts} \equiv (\bar{u}_k \bar{u}_k - \hat{u}_k \hat{u}_k) / 2$ に供給する．

また，テストスケール運動エネルギーは粘性応力によっても散逸する．その粘性散逸量 ϵ_{ts} は

$$\epsilon_{ts} \equiv 2\nu \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} \dots\dots\dots (26)$$

であり，これは熱エネルギーに変換される．

波数空間上でのエネルギー伝達に関する概念図を Fig.1 に示す．波数空間は，グリッドフィルタ $\bar{}$ の特性波数 k_g およ

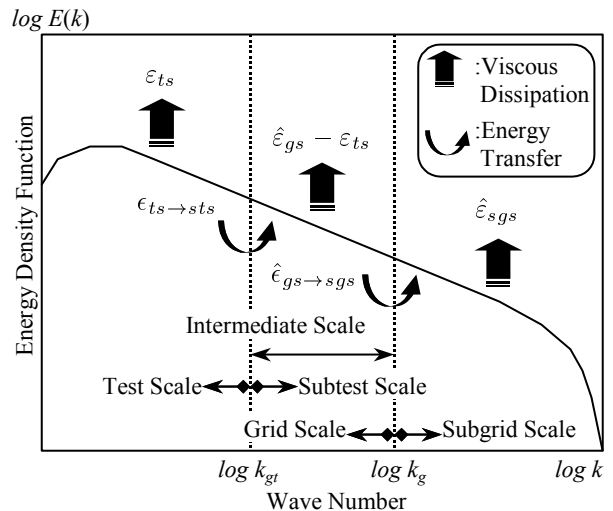


Fig.1: Sketch of the energy transfer in wave number space. Balance of the energy transfer within the intermediate scale region, i.e., $\epsilon_{ts \rightarrow sts} + \epsilon_{ts} = \hat{\epsilon}_{gs \rightarrow sgs} + \hat{\epsilon}_{gs}$, is assumed.

び二重フィルタ $\widehat{\quad}$ の特性波数 k_{gt} を境界として、三つの領域に分割される。ここで $k_{gt} < k_g$ である。以降、 $k < k_{gt}$ の領域をテストスケール、 $k_{gt} < k$ の領域をサブテストスケール、 $k < k_g$ の領域をグリッドスケール、 $k_g < k$ の領域をサブグリッドスケールと呼ぶことにする。また $k_{gt} < k < k_g$ の領域を中間スケールと呼ぶ。

それぞれの領域では、粘性の作用により運動エネルギーが散逸し、熱エネルギーに変換される。また、STS 応力の作用により、テストスケールから中間スケール（とサブグリッドスケール）へエネルギーが伝達される。同様に SGS 応力の作用によって、（テストスケールと）中間スケールからサブグリッドスケールへエネルギーが伝達される。

中間スケールは、LES の計算で参照が可能な領域であり、またエネルギー伝達・散逸に関連する有用な情報を含んでいるため重要である。中間スケールの運動エネルギーは $K_{t \leftrightarrow g} \equiv K_{sts} - \hat{K}_{sgs}$ で定義され、その輸送方程式は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{t \leftrightarrow g}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_j K_{t \leftrightarrow g}}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (\widehat{u_i p} - \hat{u_i p}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i \sigma_{ij}} - \hat{u_i \sigma_{ij}}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i \tau_{ij}} - \hat{u_i \tau_{ij}}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_j \bar{K}_{gs}} - \hat{u_j \bar{K}_{gs}}) \\ & - (\hat{\epsilon}_{gs} - \epsilon_{ts} + \hat{\epsilon}_{gs \rightarrow sgs} - \epsilon_{ts \rightarrow sts}) \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

ここで中間スケールが局所的に平衡状態にあると仮定する。すなわち中間スケールへのエネルギーの流入、流出が均衡していると考ええる。これは中間スケールの運動エネルギー輸送方程式 Eq.(27)において、次の関係を仮定することに相当する。

$$\epsilon_{ts \rightarrow sts} + \epsilon_{ts} = \hat{\epsilon}_{gs \rightarrow sgs} + \hat{\epsilon}_{gs} \dots \dots \dots (28)$$

この関係は二重フィルタ $\widehat{\quad}$ とグリッドフィルタ $\overline{\quad}$ とに関する二つの特性スケール間での局所平衡を仮定したものである。以後、この仮定を「局所スケール間平衡仮定 (Local Inter-Scale Equilibrium Assumption: LISEA)」とよぶ。

局所スケール間平衡仮定をあらわす Eq.(28)は、SGS 応力と STS 応力を用いて次のようにあらわされる。

$$\epsilon_{ts} - T_{ij} \hat{S}_{ij} = \hat{\epsilon}_{gs} - \tau_{ij} \widehat{S}_{ij} \dots \dots \dots (29)$$

Eq.(29)は、中間スケールでの運動エネルギーの伝達、散逸特性の近似式であるから、本式を利用してダイナミック SGS モデルを構築すれば、グリッドスケール運動エネルギーの散逸特性が十分に反映されたモデルになると考えられる。

3-2. 新たなダイナミック SGS モデル

ここで局所スケール間平衡仮定を用いて渦粘性型 SGS モデルのモデル定数を算出することを考える。ただし従来のダイナミックモデルと同様に Eq.(29)中の SGS 応力および STS 応力を同一のモデルで近似してしまうと、モデル定数を正しく算出できない。例えば Eq.(29)で Smagorinsky モデルを用いる。慣性小領域では $\hat{\epsilon}_{gs} \simeq \epsilon_{ts}$ が想定されるから、

$$(C_S \Delta_g)^2 (\alpha^2 |\hat{S}|^3 - |\widehat{S}|^3) \simeq 0 \dots \dots \dots (30)$$

となり、解が不定となってしまう。

そこで STS 応力と SGS 応力を、それぞれ異なる方法で近似する。STS 応力については、Taylor 展開を用いて STS 応力テンソルの個々の成分を直接近似する。このようにして近似された STS 応力を、ここでは暫定的に T_{ij}^A とあらわす。 T_{ij}^A の定式化は次節でおこなう。

SGS 応力については、渦粘性モデル、あるいは渦粘性モデルと他の SGS モデルとの mixed モデルで与える。ここでは一般性を失わぬよう、SGS 応力の近似式を次式で与える。

$$\tau_{ij}^* = L_{ij}^{A*} - 2\nu_e \widehat{S}_{ij} \dots \dots \dots (31)$$

ここで L_{ij}^A は Mixed モデルの非渦粘性モデル部をあらわし、実際には Bardina モデルや Clark モデル等が、この項に置き換わる。

局所スケール間平衡仮定をあらわす Eq.(29)に、 T_{ij}^A および Eq.(31)を代入すると、渦動粘性係数を直接求めることができる。

$$\nu_e = -\frac{T_{ij}^A \hat{S}_{ij} - L_{ij}^{A*} \widehat{S}_{ij} - (\nu |\hat{S}|^2 - \nu |\widehat{S}|^2)}{|\widehat{S}|^2} \dots \dots \dots (32)$$

上式が本報の提案する、渦動粘性係数の自動算出方法の一般式である。ここでは統計的一様方向への平均操作は導入しない。

ただし数値的に不安定となる渦動粘性係数が負の場合については、次式のようにクリッピングを行う。

$$\nu_e = \max \left(0, -\frac{T_{ij}^A \hat{S}_{ij} - L_{ij}^{A*} \widehat{S}_{ij} - (\nu |\hat{S}|^2 - \nu |\widehat{S}|^2)}{|\widehat{S}|^2} \right) \dots (33)$$

ちなみに Eq.(31)の渦粘性モデル部に Smagorinsky モデルを用い、同様にしてモデル定数を求めると、

$$(C_S \Delta_g)^2 = -\frac{T_{ij}^A \hat{S}_{ij} - L_{ij}^{A*} \widehat{S}_{ij} - (\nu |\hat{S}|^2 - \nu |\widehat{S}|^2)}{|\widehat{S}|^3} \dots (34)$$

が得られる。しかし、本報の提案するダイナミックモデルでは Eq.(32)で渦動粘性係数そのものが直接求まるから、あえて渦動粘性係数を Smagorinsky モデル等でモデル化する必要はない。Eq.(34)ではグリッドフィルタの特性長 Δ_g を評価する必要があるが、これを厳密に与えることは難しい。通常は直方体形状の計算セルの各辺の長さを h_1, h_2, h_3 とおいて、 $\Delta_g = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}$ で与えることが多い。しかしアスペクト比が極端に大きい計算セルへの適用の是非など、 Δ_g の与え方には不明な点が多い。有限体積法におけるグリッドフィルタの評価式は、次節において Eq.(42)のように求められる。この式からは、フィルタ特性長 Δ_g を単純に一つの値として括りだせそうにない。

渦動粘性係数を直接算出する Eq.(32)では、グリッドフィルタの特性長 Δ_g は明示的には現れないから、こうした不確かさは存在しない。これは本方法の利点の一つである。

このように、本報の提案する方法で渦動粘性係数が直接求まるのは、STS 応力を直接近似したためである。これにより、Eq.(29)中の未知量が SGS 応力モデル中の渦動粘性係数のみとなる。

ここで注意しなければならないのは、STS 応力を直接近似することが、Eq.(28)を介してグリッドスケールからのエネル

ギー散逸量を直接近似することに等しい点である。つまり STS 応力の近似精度が、グリッドスケールからのエネルギー散逸量の近似精度を左右することになる。SGS 応力の直接近似法である Bardina モデルや Clark モデルが十分なエネルギー散逸特性を持たないことを考えると、STS 応力の直接近似でも、エネルギー散逸量が不足する恐れがある。しかし SGS 応力と STS 応力の直接近似には、次のような違いがある。Fig.1 に示した波数空間上で考えると、SGS 応力は波数 k_g において定義される物理量である。また STS 応力は k_g より低波数の k_{gt} において定義される。LES の計算で参照できるのは k_g よりも低波数の領域であるから、SGS 応力の直接近似では、自身が定義される波数より低波数の領域の情報しか利用できない。一方で STS 応力の直接近似では、自身が定義される波数よりも高波数の領域、すなわち Fig.1 の中間スケールの情報を利用できる。このことをうまく用いれば、STS 応力の直接近似ではエネルギー散逸量の近似誤差を小さくできる可能性がある。

その傍証となる例を以下に示す。Eq.(29)で $\hat{\epsilon}_{gs} \simeq \epsilon_{ts}$ を想定し、さらに SGS 応力、STS 応力の両者に Smagorinsky モデルを適用すると次の関係が得られる。

$$\alpha^2 |\hat{S}|^3 \simeq |\bar{S}|^3 \simeq |\tilde{S}|^3 \dots\dots\dots (35)$$

さらに $\tilde{S}_{ij}$ と $\hat{S}_{ij}$ とが平行であると仮定すると、次式が得られる。

$$\hat{S}_{ij} \simeq \alpha^{-2/3} \tilde{S}_{ij} \dots\dots\dots (36)$$

またテストフィルタをグリッドフィルタの近似式 Eq.(10)と同一形式の次式で定義する。

$$\hat{f} \equiv f + \frac{\Delta_g^2}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \dots\dots\dots (37)$$

このときスケール比は $\alpha \approx \sqrt{2}$ となる。また STS 応力と、 Δ_g に関する 2 次の項までが一致する近似式を求めると、次式が得られる。

$$T_{ij} = 2L_{ij}^m \dots\dots\dots (38)$$

ここで更に $\epsilon_{ts \rightarrow sts} \simeq \hat{\epsilon}_{gs \rightarrow sgs} \simeq \epsilon_{gs \rightarrow sgs}$ と近似すると、グリッドスケールからのエネルギー散逸量 $\epsilon_{gs \rightarrow sgs}$ を、Eq.(38)で直接近似された STS 応力を用いて以下のように求めることができる。

$$\epsilon_{gs \rightarrow sgs} \simeq -T_{ij} \hat{S}_{ij} \simeq -2\alpha^{-2/3} L_{ij}^m \tilde{S}_{ij} \simeq -1.59 L_{ij}^m \tilde{S}_{ij} \dots\dots (39)$$

エネルギー散逸量 $\epsilon_{gs \rightarrow sgs}$ は、本来の定義式 Eq.(6)に Bardina モデル Eq.(9)で直接近似された SGS 応力を代入して、次式のように与えることもできる。

$$\epsilon_{gs \rightarrow sgs} = -\tau_{ij} \tilde{S}_{ij} \simeq -L_{ij}^m \tilde{S}_{ij} \dots\dots\dots (40)$$

両者を比較すると、Eq.(39)で算出されたエネルギー散逸量の近似値は、Eq.(40)の約 1.6 倍の値となっている。このように STS 応力の直接近似では、SGS 応力の直接近似では過小評価されるエネルギー散逸量をより大きな値として算出する。これは、STS 応力の直接近似から求めたエネルギー散逸量の近似誤差が、SGS 応力の直接近似の場合に比べて小さいことを示唆するものである。

3-3 . STS 応力の近似式

ここでは、STS 応力の近似式を導出する。局所スケール間平衡仮定より導出された新たなダイナミック SGS モデルでは、STS 応力の直接近似に関する精度が、グリッドスケールからのエネルギー散逸量の近似精度を左右すると予想される。したがって STS 応力の近似は、なるべく高い精度で厳密に行うことが望まれる。

まず、グリッドフィルタについて考える。三次元空間における関数 f は、原点を基点とする Taylor 展開により次のようにならわされる。

$$f_{(x_1, x_2, x_3)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(x_k \frac{\partial}{\partial a_k} \Big|_{a_1=0, a_2=0, a_3=0} \right)^l f_{(a_1, a_2, a_3)} \dots\dots (41)$$

空間の離散化に有限体積法を用いることを想定する。計算セルの形状を各辺が座標軸に平行で、重心が原点と一致する直方体とみなし、 x_i ($i=1,2,3$) 方向の各辺の長さを h_i とする。Eq.(41)を計算セル内で体積平均すると、有限体積法におけるグリッドフィルタの評価式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{f} \simeq f &+ \frac{1}{24} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right) \\ &+ \frac{1}{576} \left(h_1^2 h_2^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + h_2^2 h_3^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + h_3^2 h_1^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_1^2} \right) \\ &+ \frac{1}{1920} \left(h_1^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + h_2^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + h_3^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} \right) + \mathcal{O}(h_i^6) \end{aligned} \dots\dots\dots (42)$$

さらに Eq.(42)中の交差微分に関する項($\dots$)/576を無視すると、簡易化された評価式が得られる。

$$\bar{f} \simeq f + \frac{1}{24} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1}{1920} \left(h_i^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^4} \right) \dots\dots\dots (43)$$

テストフィルタには、Eq.(37)を 2 次中心差分法で近似した形式である次式を用いる。

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(i,j,k)} \equiv f_{(i,j,k)} &+ \frac{1}{24} \left(f_{(i+1,j,k)} + f_{(i-1,j,k)} + f_{(i,j+1,k)} \right. \\ &\left. + f_{(i,j-1,k)} + f_{(i,j,k+1)} + f_{(i,j,k-1)} - 6f_{(i,j,k)} \right) \dots\dots (44) \end{aligned}$$

2 次中心差分法は打ち切り誤差項を考慮すると、

$$\frac{f_{(i+1,j,k)} - 2f_{(i,j,k)} + f_{(i-1,j,k)}}{h_1^2} \simeq \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \dots\dots (45)$$

のようにあらわされるから、テストフィルタ Eq.(44)は次式で評価される。

$$\hat{f} \simeq f + \frac{1}{24} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1}{288} \left(h_i^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^4} \right) \dots\dots\dots (46)$$

グリッドフィルタの評価式 Eq.(43)およびテストフィルタの評価式 Eq.(46)を用いて、STS 応力を計算セルの各辺の長さ h_i に関して展開する。STS 応力の展開式と、 h_i に関する 4 次の項まで一致する近似式を求めると、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} T_{ij} &\simeq T_{ij}^A \\ &= 2\mathcal{L}_{ij}^G - \frac{17}{5} \left(\hat{\mathcal{L}}_{ij}^G - \mathcal{L}_{ij}^G \right) + \frac{37}{5} \left(\hat{u}_i - \bar{u}_i \right) \left(\hat{u}_j - \bar{u}_j \right) \dots\dots (47) \end{aligned}$$

グリッドフィルタを Eq.(43)のように簡略化して評価しているため厳密ではないものの、Eq.(47)は STS 応力を概ね 4 次精度で近似した式となっている。また同様に 2 次の精度で近似すると次式が得られる。

$$T_{ij} \simeq T_{ij}^A = 2\mathcal{L}_{ij}^G \dots\dots\dots (48)$$

なお、Eq.(47)、Eq.(48)はテストフィルタを Eq.(44)で与えたときの STS 応力の近似式であり、それ以外のテストフィルタを用いる場合には、それに応じた近似式を用いる必要がある。

4. 検証解析

4-1. 数値解法

本報で用いる数値解法は、大筋において稲垣らの解法^[12]を非等間隔格子向けに拡張したものである。以下にその概要を示す。

空間の離散化には、すでにグリッドフィルタの評価式の導出で想定したように、有限体積法を用いる。また変数配置には、圧力と速度を計算セルの中心で定義するコロケート配置が採用される。

ここで補間オペレータ

$$\tilde{f}^{1x_1} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} \equiv \frac{h_{1(i)}f_{(i+1,j,k)} + h_{1(i+1)}f_{(i,j,k)}}{h_{1(i+1)} + h_{1(i)}} \dots\dots (49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{2x_1} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} &\equiv \left\{ h_{1(i+1)}^2(26h_{1(i)} + 6h_{1(i+1)})f_{(i,j,k)} \right. \\ &+ h_{1(i)}^2(6h_{1(i)} + 26h_{1(i+1)})f_{(i+1,j,k)} \\ &+ h_{1(i)}h_{1(i+1)}^2(h_{1(i)} + 3h_{1(i+1)})\frac{\delta \tilde{f}^{1x_1}}{\delta x_1} \Big|_{(i,j,k)} \\ &\left. - h_{1(i)}^2h_{1(i+1)}(3h_{1(i)} + h_{1(i+1)})\frac{\delta \tilde{f}^{1x_1}}{\delta x_1} \Big|_{(i+1,j,k)} \right\} \\ &\Big/ \left\{ 2(h_{1(i)} + h_{1(i+1)})(3h_{1(i)} + h_{1(i+1)}) \right. \\ &\left. (h_{1(i)} + 3h_{1(i+1)}) \right\} \dots\dots (50) \end{aligned}$$

および差分オペレータ

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} \Big|_{(i,j,k)} \equiv \frac{f_{(i+\frac{1}{2},j,k)} - f_{(i-\frac{1}{2},j,k)}}{h_{1(i)}} \dots\dots\dots (51)$$

を導入する。Eq.(49)は 2 次精度の線形補間法であり、また Eq.(50)は、格子幅が等間隔の場合には 4 次精度の補間法となる。

Navier-Stokes 方程式 Eq.(2)の移流項は、次式で差分近似される。

$$\frac{\partial u_l u_m}{\partial x_l} \approx \frac{\delta U_l \tilde{u}_m^{2x_l}}{\delta x_l} \Big|_{(i,j,k)} \dots\dots\dots (52)$$

ここで U_l は計算セルの界面流速であり、次式で与えられる。

$$U_{1(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} = \tilde{u}_1^{2x_1} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} - \frac{2\Delta t (p_{(i+1,j,k)}^{n+1} - p_{(i,j,k)}^{n+1})}{h_{1(i)} + h_{1(i+1)}} \dots\dots\dots (53)$$

また u_l^* は、Eq.(2)を圧力項と他の項とで時間分離して、フラクショナルステップ法を用いる際にあらわれる中間流速で

ある。ここで Δt は時間刻み幅である。

Eq.(2)に現れる速度の拡散項、すなわち粘性応力項と渦粘性型の SGS 応力項については、2 次中心差分法で近似する。なお、本報では Eq.(31)で示される SGS モデルにおいて、 $L_{ij}^A = 0$ の場合についてのみ解析を行う。

中間速度 u_l^* の算出で用いる時間積分法には、速度の拡散項に対して Crank-Nicolson 法、移流項については以下に示す 4 次精度の 4 段 Runge-Kutta 法が採用される。

$$\begin{aligned} f^{n+\frac{q}{4}} &= f^n + \beta_q \Delta t \frac{df^{n+\frac{q-1}{4}}}{dt} \\ \beta_q &= \frac{1}{5-q}, \quad (q = 1, \dots, 4) \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

セル中心速度は、次式により更新される。

$$u_{1(i,j,k)}^{n+1} = u_{1(i,j,k)}^* - \Delta t \frac{\delta \tilde{p}^{n+1, 2x_1}}{\delta x_1} \Big|_{(i,j,k)} \dots\dots\dots (55)$$

連続の式 Eq.(1)は、次式で差分近似される。

$$\frac{\delta U_l^{n+1}}{\delta x_l} \Big|_{(i,j,k)} = 0 \dots\dots\dots (56)$$

圧力 p^{n+1} は、Eq.(53)と Eq.(56)から得られる Poisson 方程式を解くことによって求められる。

4-2. 解析体系および解析条件

モデルの有効性を確認するため、検証解析をおこなう。本報で対象とする流れ場は、平板チャネル乱流である。壁面摩擦速度 u_τ とチャネル半幅 δ を基準とした Reynolds 数 Re_τ は 395 である。計算領域は主流方向 (x 方向) に 6.4δ 、高さ方向 (y 方向) に 2δ 、奥行き方向 (z 方向) に 1.6δ の直方体である。主流方向と奥行き方向の境界には、周期境界条件を適用した。壁面には滑り無し条件を用いた。流れを維持するために、流れ方向に一定の加速度 $g = \nu^2 Re_\tau^2 / \delta^3$ を与えた。

今回の解析では、空間解像度の異なる二通りの計算格子を用いた。計算格子の詳細を Table.1 に示す。Case1 は粗い格子、Case2 は細かい格子である。Case2 は、 x および z 方向への格子分割数が Case1 の 2 倍になっている。 y 方向の格子分割は Case1、Case2 で同じである。計算セルの y 方向サイズ h_y は公比 1.13 の等比数列で与えられており、壁面近傍で細かく、チャネル中央で粗い格子分割になっている。

本報では、Eq.(31)で示される SGS モデルにおいて、非渦粘性モデル部が $L_{ij}^A = 0$ である場合、すなわち SGS モデルとして渦粘性モデルを単独で用いる場合について検討する。このとき渦動粘性係数は次式から求められる。

$$\nu_e = \max \left(0, -\frac{T_{ij}^{A*} \hat{S}_{ij} - (\nu |\hat{S}|^2 - \nu |\widehat{\bar{S}}|^2)}{|\hat{S}|^2} \right) \dots\dots (57)$$

Table.1: Resolutions of computational grids. In this table, L is a domain size, N is a grid number, h^+ is a computational cell size and δ is the channel half width. In both cases, the Reynolds number based on the wall friction velocity and the channel half width is 395.

Case	L_x	L_z	N_x	N_y	N_z	h_x^+	h_y^+	h_z^+
1	6.4 δ	1.6 δ	32	64	32	79	1.1-45.8	19.8
2	6.4 δ	1.6 δ	64	64	64	39.5	1.1-45.8	9.9

Eq.(57)中の STS 応力の直接近似式 T_{ij}^A については、2 次精度の近似式 Eq.(48)を用いる場合（以降、LISEA2 と称す）と、4 次精度の近似式 Eq.(47)を用いる場合（LISEA4）について検討する。

比較のために SGS モデルを用いない場合（NOSGS）と、Smagorinsky モデルに Van Driest 型の減衰関数^[13]

$$(C_S \Delta_g) = C_{S0} \left(1 - \exp \left(-\frac{y^+}{25} \right) \right) \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \dots (58)$$

を組み合わせる用い、 $C_{S0}=0.10$ とする場合（SM010）および $C_{S0}=0.15$ とする場合（SM015）についても解析する。ここで上付き添え字 “+” は、長さの次元を v/u_τ で、時間の次元を v/u_τ^2 で規格化した値であることを示す。これらの解析結果は Moser らによる DNS^[14]の結果と比較される。

4-3. 解析結果

今回の解析では、計算の安定化を図るための統計的一様方向への平均操作は導入していないが、すべての計算は安定に進行し、数値的な不安定現象は生じなかった。以下に解析結果を示す。

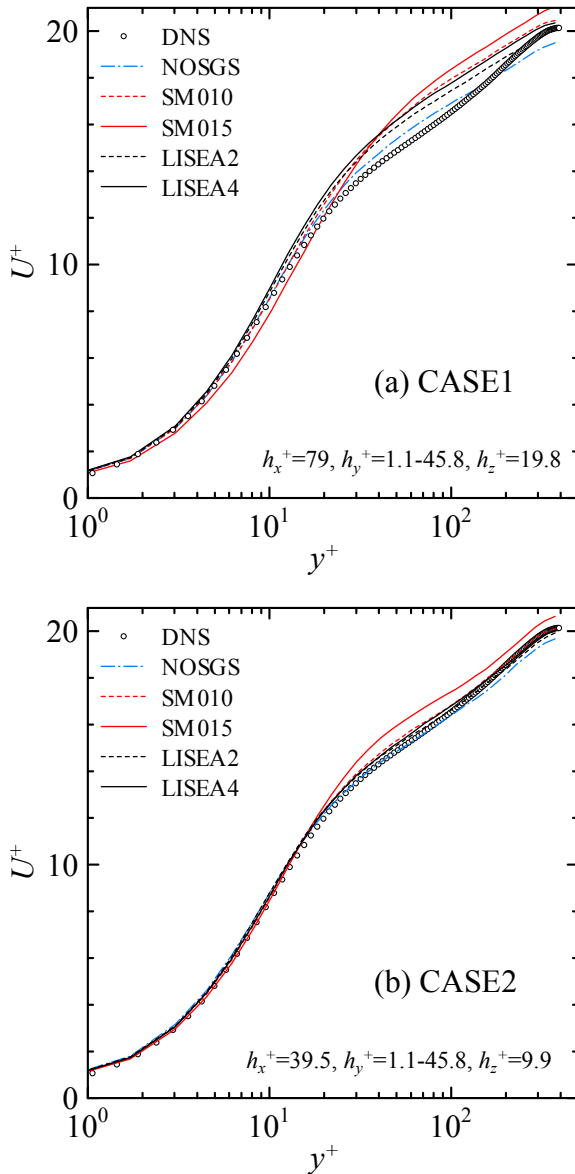


Fig.2: Profiles of the mean streamwise velocity.

(1) 時間平均速度

速度の主流方向成分の時間平均値 $U^+ = \langle \bar{u}^+ \rangle_t$ の分布を Fig.2 に示す。ここで $\langle \cdot \rangle_t$ は、時間平均操作をあらわす。時間平均の間隔は、Case1 については約 $25000 \times v/u_\tau^2$ ，Case2 については約 $20000 \times v/u_\tau^2$ である。

Fig.2(a)は、格子解像度が低い Case1 での結果である。DNS の結果に最も近い平均速度分布を与えたのは、SGS モデルを用いない NOSGS である。しかし空間の離散化誤差を十分に小さくして計算すると、NOSGS は対数則領域の平均速度を DNS の結果よりも小さく与えることが Morinishi & Vasilyev^[7]により示されている。したがって Fig.2(a)の NOSGS の結果には、空間の離散化誤差が含まれていると考えられる。

Morinishi & Vasilyev は、 $Re_\tau=395$ の平板チャネル乱流を対象に、スタガード格子系のエネルギー保存スキームを用いて各種の SGS モデルを比較した。対象としたモデルは、NOSGS、Smagorinsky モデル（本報の SM010 と同一）、DSM、DTM、改良型 DTM（DTMR）である。また、比較的粗い格子解像度のもとで行った SGS モデル無しのスペクトル法の結果と、同程度の格子解像度での NOSGS の結果の比較も行われた。それによると NOSGS で得られる平均速度分布は、空間の離

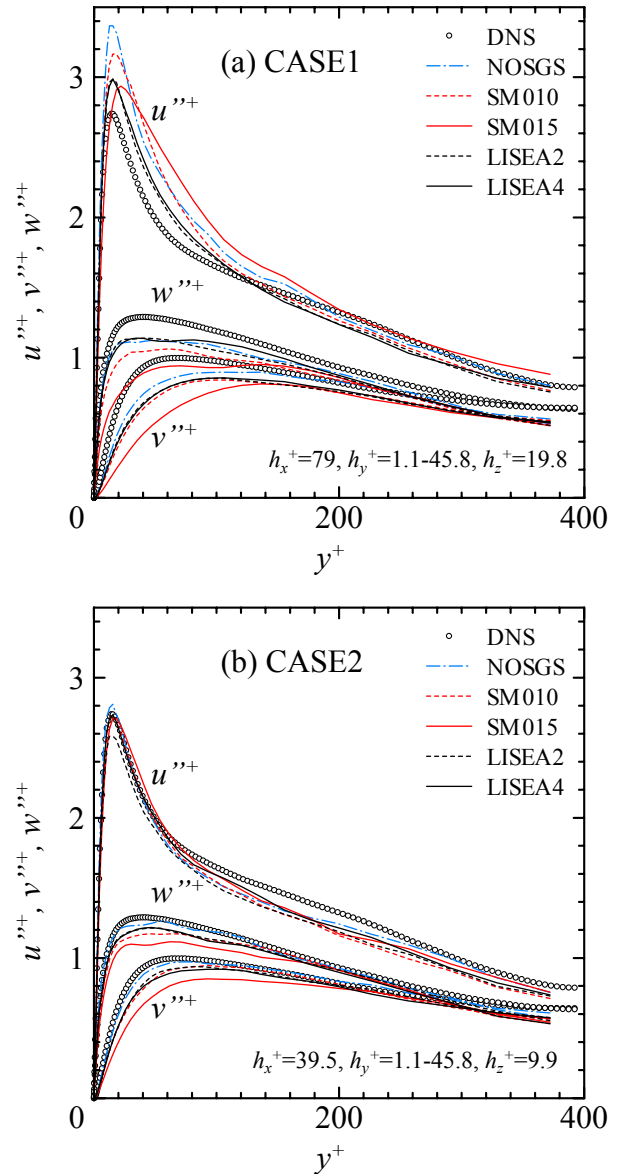


Fig.3: Profiles of the velocity fluctuations.

散化を 12 次精度まで高精度化することにより、スペクトル法の結果に近づく。これは高精度化によって離散化誤差が減少するためである。ちなみにスペクトル法の結果は、対数則領域の速度を DNS より小さく与える。これは SGS 応力項を無視しているからである。このことから SGS 応力項は、対数則領域の平均速度を DNS の結果まで引き上げる効果をもつことになる。離散化誤差が十分に小さい 12 次精度での比較では、SM010 と DTMR が DNS に近い結果を与える。

このように SM010 は、離散化誤差が小さければ平均速度の予測精度が高い。Fig.2(a)で SM010 が DNS と異なる結果を与えるのは離散化誤差が原因であり、他のモデルの結果も同程度の離散化誤差を含むと考えられるから、平均速度の比較は SM010 の結果を「仮の正解」として行えばよいと考えられる。

Fig.2(a)では、STS 応力を 4 次精度で近似した LISEA4 が SM010 に比較的近い結果を与える。STS 応力を 2 次精度で近似した LISEA2 は、チャンネル中央部で SM010 よりも平均速度を小さく与える。このように LISEA2, LISEA4 の結果には差が見られるが、どちらも SM015, NOSGS よりも SM010 に近い結果となっている。

Fig.2(b)は格子解像度が高い Case2 の結果である。Fig.2(a)に比べて全モデルとも DNS の結果に近い速度分布を与えた。LISEA2, LISEA4, SM010 の結果はほぼ一致している。

以上のように主流方向の平均速度に関しては、LISEA4, LISEA2 とともに SM010 に比較的近い結果を与える。格子解像度が低い場合には、LISEA4 の方が LISEA2 よりも SM010 により近い結果を与える。格子解像度が高い場合には LISEA2, LISEA4, SM010 とともに DNS に近い結果となる。

(2) 速度の時間変動値

Fig.3 に、速度の主流方向成分、高さ方向成分、奥行き方向成分の時間変動値 u''^+, v''^+, w''^+ の分布を示す。ここで、 $u''^+ = \sqrt{\langle \bar{u}^2 \rangle_t - \langle \bar{u} \rangle_t^2}$ である。平均速度分布の比較では SM010 の結果を「仮の正解」として扱ったが、速度変動に関しては、SM010 は必ずしも優れた予測モデルにはなっていない。それは先に引用した Morinishi & Vasilyev^[7]の解析で示されている。すなわち格子解像度が低い場合に LES で算出される速度変動値は、速度のグリッドスケール成分の変動値に相当するものであって、サブグリッドスケール成分による変動分は含まれない。したがって LES での速度変動値の正解は、DNS の結果からサブグリッドスケール成分による変動分を差し引いた値になるべきであり、DNS より小さい値となるはずである。Morinishi & Vasilyev による 12 次精度での SM010 の結果では、速度の主流方向の変動値 u''^+ は DNS の結果より大きく、この点からみて SM010 は速度変動に関しては必ずしも妥当なモデルではない。

したがって Fig.3 では、どの結果が正解であるという明確な指標はない。よってここでは、LISEA2, LISEA4 の与える結果の定性的な比較を行うにとどめる。

Fig.3(a)は格子解像度が低い Case1 の結果である。主流方向の変動値 u''^+ に関しては、各モデルとも壁面近傍で DNS より大きい値を示している。速度変動のピーク値については NOSGS が最も大きな値を示し、次いで SM010 が大きい。LISEA4 と LISEA2 はほぼ等しいピーク値を示し、SM010 より小さい値を示す。

高さ方向成分の変動 v''^+ に関しては、各モデルとも DNS より小さい値を示している。LISEA2, LISEA4 は SM010 とほぼ一致する結果となり、NOSGS はそれよりも大きめの結果を与える。SM015 は他のモデルよりも小さい値を与える。

奥行き方向成分の変動 w''^+ に関しては、各モデルとも DNS

より小さい値を示す。SM015 の結果が最も小さく、次いで SM010 が小さい。LISEA2, LIEA4, NOSGS の結果はほぼ一致する。

Fig.3(b)は Case2 の結果である。各モデルとも Fig.3(a)に比べて DNS に近い値を示している。主流方向の変動値 u''^+ に関しては LISEA2 のみ DNS よりも小さめの値を与えている。それ以外の挙動は、各モデルとも Fig.3(a)の場合とほぼ同様である。

以上のように速度の変動値に関しては、LISEA2 と LISEA4 はほぼ一致する結果を与える。格子解像度が低い場合には、LISEA2 および LIEA4 の結果と、SM010 の結果には歴然とした差が見られるが、格子解像度が高い場合には大きな差は見られなくなり、DNS の結果に近づく。

(3) グリッドスケールからのエネルギー散逸量

グリッドスケールからのエネルギー散逸量の時間平均値 $\langle \epsilon_{gs \rightarrow sgs}^+ \rangle_t$ の分布を Fig.4 に示す。LISEA2, LIEA4 でのエネルギー散逸量は、次式を用いて算出した。

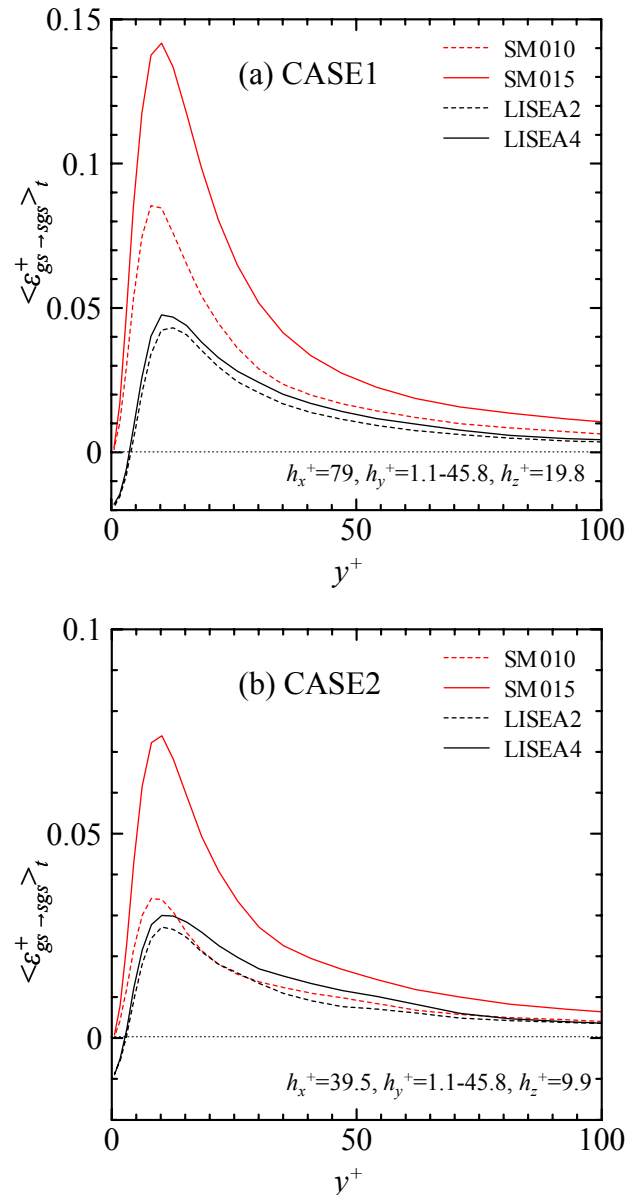


Fig.4: Profiles of the mean energy dissipation from the grid scale.

$$\epsilon_{gs \rightarrow sgs} \simeq \hat{\epsilon}_{gs \rightarrow sgs} = -T_{ij}^A \hat{S}_{ij} + \nu |\hat{S}|^2 - \nu |\widehat{S}|^2 \dots (59)$$

また SM010, SM015 については次式から算出した .

$$\epsilon_{gs \rightarrow sgs} = (C_S \Delta_g)^2 |\bar{S}|^3 \dots (60)$$

Fig.4(a)は Case1 の結果である . SM015 によるエネルギー散逸量が最も大きく、次いで SM010 が大きい . 両者とも Eq.(60)から算出しているので、エネルギー散逸量は常に正の値となる . LISEA2 は LISEA4 より若干小さい値となるが、両者とも同程度のエネルギー散逸量を与え、また SM010 より小さい値を示す . LISEA2, LISEA4 とも壁面近傍で負の値を示している . ただしエネルギー散逸が負となる場合の渦動粘性係数は、Eq.(57)でクリッピングされてゼロとなるから、この場合のエネルギー散逸量は実際にはゼロとして取り扱われる .

Fig.4(b)は Case2 の結果である . Fig.4(a)に比べて全体的にエネルギー散逸量の絶対値が小さくなっている . Case2 は Case1 に比べて格子解像度が高いので、全波数領域に占める

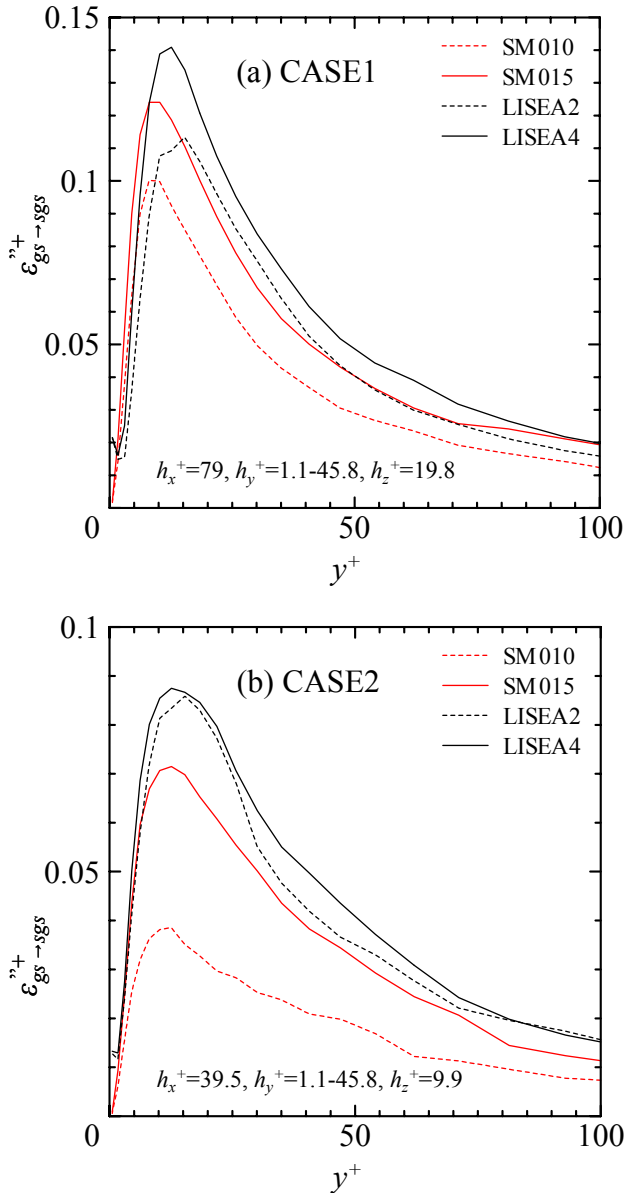


Fig.5: Profiles of the fluctuation of the energy dissipation from the grid scale.

サブグリッドスケール領域の割合は小さく、SGS 応力の寄与も小さくなった結果である . LISEA2, LISEA4 は、SM010 と同程度のエネルギー散逸量を与える . ただし壁面近傍に関しては、LISEA2, LISEA4 とも負の値を与える .

Fig.5 にグリッドスケールからのエネルギー散逸量の時間変動値 $\epsilon_{gs \rightarrow sgs}^+$ の分布を示す . Fig.5(a)は Case1 の結果である . LISEA4 は LISEA2 よりも大きい値となる . また両者とも SM010 より大きい変動量を与える .

Fig.5(b)は Case2 の結果である . LISEA4 は LISEA2 よりも大きい変動値を示しているが、両者の差は Case1 に比べて小さくなっている . SM010 の結果は LISEA2, LISEA4 よりも小さい .

以上のようにグリッドスケールからのエネルギー散逸量に関し、LISEA2 と LISEA4 は時間平均値については同程度の値を示す . しかし変動量については、格子解像度が低い場合には LISEA4 の方が LISEA2 よりも大きい値を示す . 格子解像度が高い場合には、変動量に関して両者の差は小さくなる . STS 応力の近似精度の違いによる影響は、エネルギー散逸量の時間平均値よりも変動量の方に大きく表れることになる . また Smagorinsky モデルとの比較では、格子解像度が低い場合は、LISEA2, LISEA4 とも SM010 より小さいエネルギー散逸量を与えるが、格子解像度が高い場合には、SM010 と同程度のエネルギー散逸量を与える . ただしエネルギー散逸量の時間変動値については、格子解像度の高低によらず LISEA2, LISEA4 は SM010 よりも大きな値を与える .

5. まとめ

SGS 応力のモデルはその近似対象により、「SGS 応力テンソル成分の近似モデル」および、「グリッドスケールからのエネルギー散逸量の近似モデル」の二通りに分類される . Smagorinsky モデル等の渦粘性モデルはエネルギー散逸量の近似モデルであり、エネルギー散逸特性を考慮して渦動粘性係数を設定することが必要である .

SGS モデルのモデル定数の自動算出方法として広く用いられている Lilly の最小自乗法は、SGS モデルがテンソルレベルでなるべく Germano 恒等式を満たすようにモデル定数を最適化する方法であり、エネルギー散逸特性に関して考慮するものではない .

そのため渦粘性モデルや渦粘性モデルを含む mixed モデルへの Lilly の最小自乗法の適用は、数値不安定やエネルギー散逸量不足などの不具合を生じやすい . 渦粘性モデルのモデル定数自動算出では、エネルギー散逸特性を反映させる必要がある .

本報では、エネルギー散逸特性を反映する渦粘性モデルのためのモデル定数自動算出方法を、「局所スケール間平衡仮定」から導出した . 局所スケール間平衡仮定は、二重フィルタとグリッドフィルタとに関する二つの特性スケールの間での、エネルギー伝達の局所平衡を仮定するものである . 提案された方法では、テストスケールからのエネルギー伝達量を、Taylor 展開により直接近似された STS 応力テンソルと、テストスケールの歪速度テンソルとの内積として与え、そこから中間スケールでの粘性散逸量を減じることによってグリッドスケールからのエネルギー散逸量を決定する . 本手法では、渦動粘性係数が自動算出される .

SGS モデルに渦粘性モデルを単独で用いる場合を対象に、局所スケール間平衡仮定から導出されたモデル定数自動算出方法の検証解析を行った . 対象とした流れ場は $Re_\tau = 395$ の平板チャネル乱流である . STS 応力を 2 次精度 (LISEA2) および 4 次精度 (LISEA4) で直接近似した場合について解析した . LISEA2, LISEA4 とも統計的一様方向への平均操作は用いていないが、解析は安定に進行した .

時間平均流速について、LISEA2, LISEA4 は、Van Driest 型の壁面減衰関数を用いた Smagorinsky モデルで、 $C_{S0}=0.10$ とする場合 (SM010) の結果に近い結果を与えた。SM010 は、平板チャネル乱流の平均速度に関する予測精度が高いモデルである。格子解像度が低い場合には、LISEA2 と LISEA4 の結果には差が見られ、LISEA4 の方が SM010 により近い速度分布を与えた。格子解像度が高い場合には、LISEA2, LISEA4 の差は小さくなり、DNS の結果にほぼ一致する結果を与えた。

速度の時間変動値については、LISEA2, LISEA4 の結果に大きな差はみられなかった。また SM010 の結果と比べて遜色ない結果が得られた。

グリッドスケールからのエネルギー散逸量については、その時間平均値に関し、LISEA2 と LISEA4 の結果に大きな差は見られなかった。しかしエネルギー散逸量の時間変動値については、格子解像度が低い場合に LISEA4 が LISEA2 よりも大きい変動値を与えた。このことから、STS 応力の近似精度がエネルギー散逸に及ぼす影響は、時間平均値よりもむしろ時間変動値の方に大きく表れるといえる。

以上の結果を総合して判断すると、局所スケール間平衡仮定から導出された渦粘性モデルのためのモデル定数自動算出方法は、十分に有効な方法である。STS 応力の近似精度については、格子解像度が低い場合への適用を考えると、なるべく高い精度で近似することが望ましい。

参考文献

- (1) Smagorinsky, J., "General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment" *Mon. Weather Rev.* **91**, 99-164 (1963)
- (2) Germano, M., Piomelli U., Moin, P. and Cabot, W. H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Phys. Fluids A* **3**, 1760-1765 (1991)
- (3) Lilly, D. K., "A proposed modification of the Germano subgrid scale closure method", *Phys. Fluids A* **4**, 633-635 (1992)
- (4) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., "A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows" *Phys. Fluids A* **5**, 3186-3196 (1993)
- (5) Salvetti, M. V. and Banerjee, S., "A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations" *Phys. Fluids* **7**, 2831-2847 (1995)
- (6) Horiuchi, K., "A new dynamic two-parameter mixed model for large-eddy simulation", *Phys. Fluids* **9**, 3443-3464 (1997)
- (7) Morinishi, Y. and Vasilyev, O. V., "A recommended modification to the dynamic two-parameter mixed subgrid scale model for large eddy simulation of turbulent flow", *Phys. Fluids* **13**, 3400-3410 (2001)
- (8) Meneveau, C., Lund, T. S. and Cabot, W., "A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence", *J. Fluid Mech.* **319**, 353-385 (1996)
- (9) Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P. and Akselvoll, K., "A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows" *J. Fluid Mech.* **286**, 229-255 (1995)
- (10) Bardina, J., Ferziger, J. H. and Reynolds W. C., "Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows" *Stanford University Tech. Rep.* TF-19 (1983)
- (11) Clark, R. A., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., "Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow", *J. Fluid Mech.* **91**, 1-16 (1979)
- (12) 稲垣昌英, 安倍賢一, "コロケーション格子を用いた LES の計算精度改善に関する一考察", 日本機械学会論文集, **64-623 B**, 1981-1988 (1998)
- (13) Van Driest, E., R., "On turbulent flow near a wall" *J. Aeronaut. Sci.* **23**, 1007 (1956)
- (14) Moser, R. D., Kim, J. and Mansour N. N., "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re\tau=590$ ", *Phys. Fluids* **11**, 943-945 (1999)