第 15 回数値流体力学シンポジウム
C05-2

完全な４次精度を持つ一般座標系での LES の方法の渦度・ベクトルポテンシャル法への適用

Application of LES Method with Complete Fourth Order Accuracy in Generalized Coordinate to Vorticity-Vector Potential Formulation

徳永　宏、京工繊大、〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町、e-mail: tokunaga@ipc.kit.ac.jp
Hiroshi Tokunaga, Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, JAPAN

１．序論　最近のＬＥＳの計算手法の発達と計算機の性能の飛躍的発展に伴い、LES を工学の実用問題に適用することが焦眉となって来ている。実用問題への適用にあたって、重要な課題として、LES に用いられる数値計算方法の高精度化がある。同時に、流体機械等の複雑な機械要素形状の流れを計算する場合、格子点数は莫大となる。この課題を克服するためには、LES の計算にあたって、たとえばチャネル内流れの乱流遷移の LES などは、従来用いられている格子よりも、ひとまわりもふたわりも少ない格子で遂行される必要性がある。

独自の LES の手法として、著者らは、Dynamic SGS モデルに、高次精度のフィルタイング手法を用い、この方法を著者等の開発した渦度・ベクトルポテンシャル法と４次精度差分法を結合した方法に適用し、既にチャネル乱流の遷移の計算や、縦リブレットによる抵抗低減の計算に成功を収めている。[1~4] 本稿では、一般座標系で書かれたプログラムを用いて、まず少ない格子数 $32\times85\times32$ で遷移の数値計算に成功した結果を報告する。

２．LES の基礎方程式

SGS モデルとして、Dymnamic Model を用い、ボックスフィルタリング G を適用する際、４次精度を確保するため、流れの変数 f を 4 次精度のラグランジュ補間を用いて表し、次の積分を解析的に計算する。

$$\bar{f} = \int\int\int G(x_1-x_1', x_2-x_2', x_3-x_3') \quad (1)$$
$$f(x_1', x_2', x_3')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3',$$

フィルター幅は、基礎フィルターでは格子間隔の 1/8、補助フィルターでは 1/4 とした。これにより、ボックスフィルターであっても、過度のフィルタリングを回避できる。

このとき、LES の基礎方程式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i\overline{u}_j = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

ここで、τ_{ij} はレイノルズ応力で、以下の式であらわされる。

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i\overline{u}_j, \quad (3)$$

そして、これは乱流粘性係数 ν_t により、以下で与えられる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -\nu_t\overline{S}_{ij}, \quad (4)$$

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right),$$

ここで、ν_t は、Dynamic SGS Model を適用して、計算される。

$$\nu_t = C(x_1,x_2,t)\{\overline{\Delta}_1\overline{\Delta}_2\overline{\Delta}_3\}^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}, \quad (5)$$

ここで $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ 及び $\overline{\Delta}_3$ は、x、y 及び z 方向のフィルター幅である。$C(x_1,x_2,t)$ の計算では、これより２倍の幅のテストフィルターが、次式のように x、z 軸方向に課せられる。

$$C(x_1,x_2,t) = < L_{ij}M_{ij} > /2 < M_{ij}M_{ij} >, \quad (6)$$
$$L_{ij} = -\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j} + \hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j,$$
$$M_{ij} = \hat{\overline{\Delta}}_1\hat{\overline{\Delta}}_3(|\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij} - \widehat{|\overline{S}|\overline{S}_{ij}}).$$

ここで、$<>$ は x 、z 方向の空間平均を表し、$\hat{\overline{\Delta}}_1$ 、$\hat{\overline{\Delta}}_3$ は、x_1、 x_3 方向のテストフィルター幅である。　次に、渦度 $\vec{\omega}$ 及びベクトル・ポテンシャル $\vec{\psi}$ を次式で定義する。

$$\vec{\omega} = \vec{\Delta}\times\vec{u}, \quad \vec{u} = \vec{\Delta}\times\vec{\psi} \quad (7)$$

SGS 粘性項を持つ、速度・圧力表示のナビエ・ストークス方程式の回転をとると、渦度 $\vec{\omega}$ に対する渦度輸送方程式が得られる。ベクトルポテンシャル　$\vec{\psi}$ の定義式を連続の式に代入して、次のベクトルポテンシャルにたいするソレノイド条件

$$\vec{\Delta}\cdot\vec{\psi} = 0 \quad (8)$$

を用いると、以下のポワソン方程式が得られる。

$$\vec{\Delta}\vec{\psi} = -\vec{\Delta}\omega \quad (9)$$

これらの方程式を、対象とする流れの幾何形状に応じて、一般か座標変換を行い、その結果得られた式を、基礎方程式とする。

３．数値計算方法

渦度輸送方程式の空間微分項の離散化は、たとえば ξ 方向の１階及び１階微分は、下記のような４次精度で行う。

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right|_{ijk} = (-\omega_{i+2,j,k} + 8\omega_{i+1,j,k} - 8\omega_{i-1,j,k} \quad (10)$$
$$+\omega_{i-2,j,k})/(12\triangle\xi)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}\right|_{ijk} = (-\omega_{i+2,j,k} \tag{11}$$

$$+16\omega_{i+1,j,k} - 30\omega_{i,j,k} + 16\omega_{i-1,j,k} - \omega_{i-2,j,k})/(12 \triangle \xi^2)$$

他の空間微分項も同様に離散化され、時空間に関する偏微分方程式は、以下のように時間に関する連立の常微分方程式に帰着される。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{\omega}) \tag{12}$$

$$\vec{\omega} = (\omega_{1,2,1}, \omega_{2,2,1}, ..., \omega_{I,J-1,K})^T \tag{13}$$

時間積分には、３段階３次精度の TVD Runge-Kutta 法を適用する。ポワソン方程式の離散化は、渦度輸送方程式で用いた方法を使い、反復解法には、京都大学大型計算機センターの富士通製 VPP800-63 のアーキテクチュアに合わせて、ポイントヤコビと SOR を併用することで、計算を加速した。

４．乱流遷移の LES

３次元チャネル内流れの乱流遷移をまず取り扱う。チャネル半幅 δ に対して、流れ方向周期長さは $2\pi\delta$、奥行き周期長さは $4\pi/3\delta$ で, レイノルズ数は、標準的なケースとして、チャネル半幅を代表長さとして、$Re = 8000$ とした。

採用した格子数は $64 \times 85 \times 64$、$64 \times 85 \times 32$ 及び $32 \times 85 \times 32$ の３とうりである。初期条件は, 標準で用いられている、2%の２次元の T-S 波と.02%の３次元の T-S 波をポワズイユ流に重ねたもの及び著者等によりその有効性が示されている、２次元の発達した乱流に、1%の３次元の T-S 波を重ねる方法の両方を用いた。　図１〜４に、Re_τ の時間発展を示した。最大の格子を用いた計算では、標準的な初期条件のもとでは、時刻 $t = 150$ で遷移が急激に発生し、著者らの初期条件では、時刻 $t = 40$ 付近で、遷移が起こっている. また、少ない格子の計算でも、乱流遷移は発生するが、Re_τ の値は低く抑えられることが判明した。　図５，６には、奥行き方向の渦

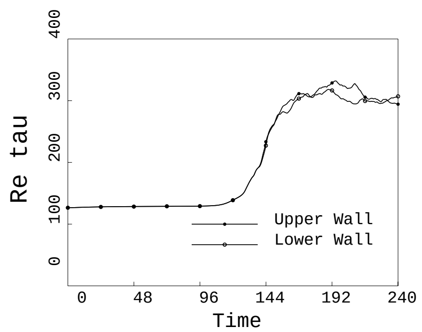


図 1: Time history of Re_τ in $64 \times 85 \times 64$ grid under standard initial condition

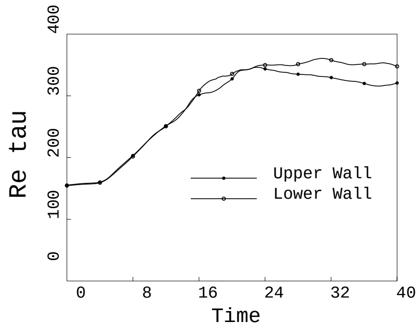


図 2: Time history of Re_τ in $64 \times 85 \times 64$ grid under original initial condition

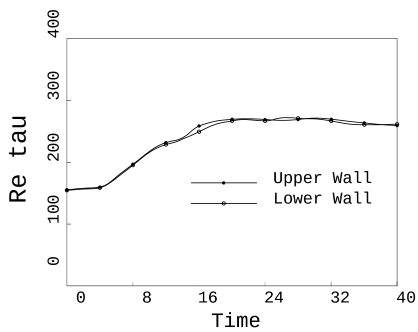


図 3: Time history of Re_τ in $64 \times 85 \times 32$ grid under original initial condition

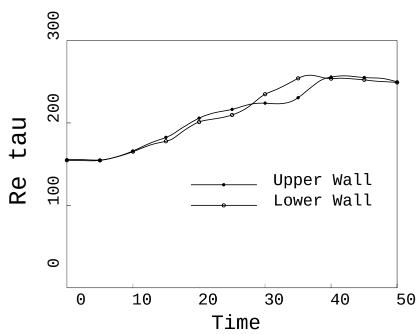
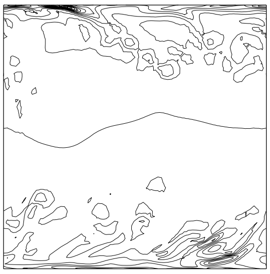
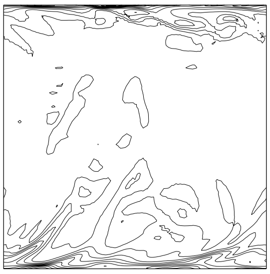


図 4: Time history of Re_τ in $32 \times 85 \times 32$ grid under original initial condition

度の、奥行き断面での渦度の等高線が示されている。４通りの計算すべてに、乱流構造の基本となる渦構造が存在するのがわかるが、その大きさや個数には違いが見られ、これが、Re_τ の遷移後の値に反映している。

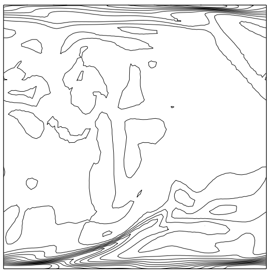


(a) $64 \times 85 \times 64$ grid under standard initial condition

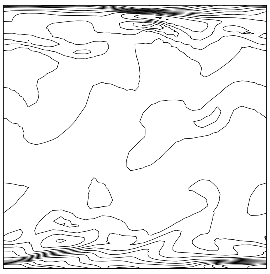


(b) $64 \times 85 \times 64$ grid under original initial condition

図 5: Spanwise Vorticity contours in $x-y$ plane



(a) $64 \times 85 \times 32$ grid under original initial condition



(b) $32 \times 85 \times 32$ grid under original initial condition

図 6: Spanwise Vorticity contours in $x-y$ plane

５．横リブレットによる抵抗低減の LES

横リブレットが流れ方向周期長さ $4\pi\delta$ 内に２個ある３次元チャネルを図７に示す。初期条件は、既に計算済みの流れ方向の周期長さ $2\pi\delta$ 内に１個の横リブレットがあるチャンエルの LES で得られた乱流場を２倍の流れ方向長さにつないで形成した。

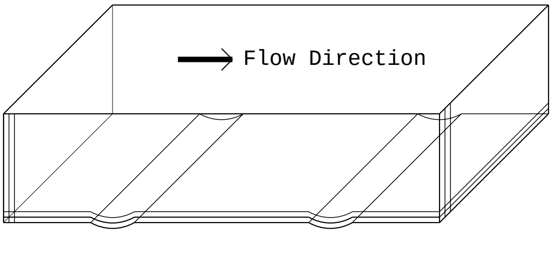


図 7: Transverse riblet

図８に z 方向渦度の $x-y$ 断面における等高線を示した。２個の横リブレットにより、下壁面の乱流構造が弱められている様子が示されている。図１１は **４．結論**

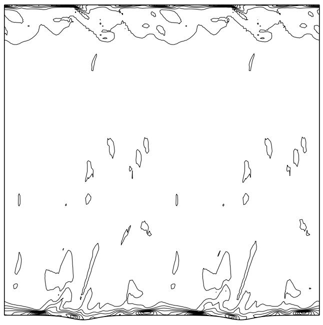


図 8: Spanwise vorticity contours on $x-y$ plane

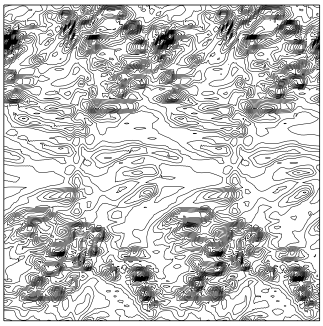


図 9: Spanwise Vorticity contours on ribed wall

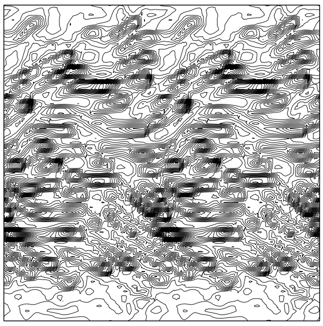


図 10: Spanwise Vorticity contours on flat wall

4 次精度差分法と４次精度のフィルタリング及び Dynamic SGS モデルに基く LES の手法を渦度・ベクトルポテンシャル法に適用して、計算を行ったところ、以下の結論が得られた。

(1) $Re = 8000$ のチャネルの乱流遷移の計算を行ったところ、有限攪乱を用いることで、短い時間で遷移で、標準的な初期条件を用いた場合と遜色のない結果が得られた。

(2) 少ない格子で計算を行うと、充分な格子と同様に遷移はおこるが、Re_τ の値は低く抑えられる。

(3) 流れ方向の周期長さに、２個の横リブレットを配置した場合、リブレットで乱流構造が弱められうことがわかった。

現在、縦リブレットによる抵抗低減の計算に取り組んでいる。計算格子を以下に示す

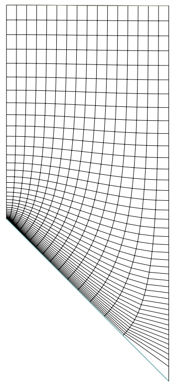


図 11: Sectional grid for longitudinal riblet

文献

1) 徳永, 機論（B編）, 62 巻 594 号, (1996), 507.
2) Tokunaga, H., AIAA Paper-99-0424, *37th Aerospace Sciences Meeting and Exibit*, Reno, Nevada, (1999), 1.
3) 徳永, 日本航空宇宙学会論文集, 47 巻 546 号, (1999), 272.
4) Tokunaga, H. and Okuda, A.., Proc. of 3rd AFOSR Int. Conf. on Direct and Large Eddy Simulation, Texas Univ. , Arlington, ed Chaquon, L.(2001), 274.