

Level set 法による固気液相互作用の数値シミュレーション

Numerical simulations of interaction among gas, liquid and solid by level set method

横井 研介、理研、351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1、E-mail:kensuke@postman.riken.go.jp
Kensuke Yokoi, RIKEN, Wako 351-0198, Japan

We performed numerical simulations of interaction among gas, liquid and solid. The numerical method is based on the level set method, but it overcomes of accumulation of re-initialization error in the level set method. Therefore the method can capture the shape of the solid body well.

I. はじめに

構造物と流体が相互作用する連成問題は、身の回り至る所 (船舶等の浮遊、配管、生物の内外、等) に現れる。本発表では、このような問題に対する level set 法によるアプローチの方法を提案する。

境界の大変形及び複雑な移動境界 (気液、固気液等) を伴う流れの数値シミュレーションにはオイラーグリッドを用いることが有効であると考えられる。オイラーグリッドを用いれば、移動する複雑形状の境界に対してグリッド生成する必要がないため、計算時間を抑えることができる。また、メッシュがねじれて計算が破綻することもないため境界のトポロジーの変化にも容易に対応することができる。しかしながら、オイラーグリッドを用いているため、界面での数値拡散やメッシュの影響などの問題が起こる。そのため様々な工夫が必要となる。現在この様な問題に対するアプローチの方法として level set 法 [1-3] が有効であると考えられる。

level set 法は界面捕獲法の一つであり、境界の捕獲 (数値拡散の抑制、曲率の計算精度の向上、界面の平滑化など) 精度の向上に役立つ。しかしながら、level set 法には level set 関数の再初期化時に発生するエラーが蓄積するという問題がある。その一例を Fig. 3 (左) に示す。そこで今回、この問題を防ぐ手法を提案する。また、この手法を CIP-CUP 法など [4-7] と組み合わせ、三相 (固気液) 相互作用の数値シミュレーションを行った結果を紹介する。

II. 境界の捕獲/追跡手法

level set 法は界面捕獲法の一つであり、 $N - 1$ 次元の surface を N 次元の関数の zero-contour を用いて表現する。この N 次元の関数を level set 関数と呼び、その zero-contour を zero-level set と呼ぶ。この方法では境界を直接追跡するのではなく level set 関数を通して、境界 (zero-level set) を追跡する。level set 関数 f_{ls} の時間発展は移流方程式

$$\frac{\partial f_{ls}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_{ls} = 0, \quad (1)$$

により計算される。本論文では、level set 関数として、以下の条件

$$\begin{aligned} f_{ls} &= 0 \quad \text{at interface} \\ |\nabla f_{ls}| &= 1 \quad \text{for whole region} \end{aligned} \quad (2)$$

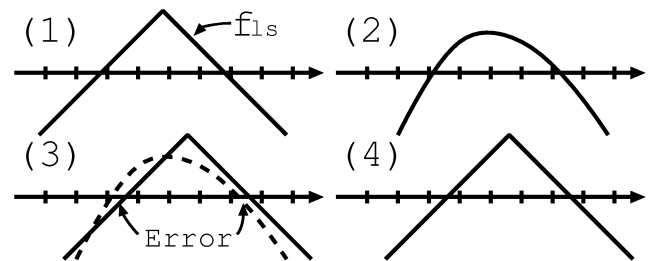
を満たす距離関数* を level set 関数として用いる。

level set 法は様々な特徴を持つ。境界のトポロジーが変化するような場合であっても、特別な手続きを必要とせず自然に対応することができる。Cartesian grid 上で曲面を精度良く捕らえるためには、境界をある程度スムーズにする必要があるが、level set 法を用いればスムージングの幅を容易にコントロールすることができる。また、曲率なども精度良く計算することができる。表面張力の計算などに必要な曲率 κ の計算には、界面に対する単位法線ベクトルの発散を求める必要があるため、界面周辺での単位法線ベクトルが必要になるが、level set 関数を用いれば

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f_{ls}}{|\nabla f_{ls}|} \right) \quad (3)$$

により正確に見積もることができる。また、このようにして求めた κ から CSF (Continuum Surface Force) model [8] を用い容易に表面張力を計算することができる。

上記のように level set 法は優れた方法であるが、level set 法には、re-initialization error という問題がある。ある時刻での level set 関数が Fig. 1(1) の様に距離関数の性質を満たしていても、移流方程式 (1) により時間発展させた後、 f_{ls} は、一般に距離関数の性質を満たさない (Fig. 1(2))。そこで、移流計算後も zero-level set は境界を正しく表現していると考え、その他の部分に対して距離関数の性質を回復させるための手続き、re-initialization を行う。しかし、この手続きにより zero-level set がずれ re-initialization error が生じる (Fig. 1(3))。このエラーは僅かであるが、次の時間発展を計算する際にエラーが混入した level set 関数 (Fig. 1(4)) を用いるため、このようなエラーが毎ステップ蓄積することになり、時間発展に伴い正しい境界を示せなくなる (Fig. 3(左))。特に複雑な移動境界を扱う場合、このエラーは無視できなくなるであろう。



*この関数は定義から f_{ls} が境界からの距離をあらわすため距離関数と呼ばれる。

FIG. 1. Outline of re-initialization by the original level set method.

そこで、本論文では、この re-initialization エラーの蓄積を防ぐ方法を提案する。以下に、本手法の概略及び計算手法の詳細を説明する。

まず、今回提案する手法の概略を Fig. 2 を用いて説明する。

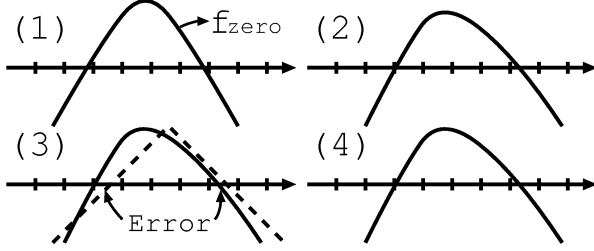


FIG. 2. Outline of present method.

本手法では、level set 関数 f_{ls} とは別に re-initialization を行わない zero-level set 追跡専用の関数 f_{zero} を用意し、 f_{zero} の zero-contour を追跡したい境界とする[†]。そして、この関数を移流方程式により時間発展させる (Fig. 2(1),(2))。そして、境界の捕獲 (スムージング、曲率の計算等) に必要な level set 関数 f_{ls} を f_{zero} の zero-contour を元に構築する (Fig. 2(3))。この時に従来の手法同様にエラーが混入するが、次の時間発展を計算する際には、エラーが混入していない zero-level set 追跡専用の関数を用いるため、re-initialization エラーの蓄積を避けることができる (Fig. 2(4))。

以下に、この手法の詳細を説明する。まず、zero-level set 追跡専用の関数 f_{zero} を移流方程式

$$\frac{\partial f_{zero}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_{zero} = 0, \quad (4)$$

により時間発展させる ((1) \rightarrow (2) in Fig. 2)。今回、移流方程式 Eq. (4) の解法には、高精度かつロバストな方法である CIP (Cubic Interpolated Propagation) 法 [4,7] を用いた。

次に、 f_{zero} の zero-contour を用いて f_{ls} を構築する方法を説明する (Fig. 2 (3))。この方法は、fast marching 法 [3] と Sussman 等の iteration による方法 [2] により構成される。まず、 f_{zero} の zero-contour (境界) を各格子点の間を補間することにより求める。そして、その zero-contour を zero-level set とし、境界から 1 cell 以内の格子点の f_{ls} を fast marching 法、Eikonal 方程式

$$|\nabla f_{ls}| = 1 \quad (5)$$

を計算することにより求める。次に、この様にして求められた f_{ls} の値を固定し Sussman 等の方法、以下の式 Eq. (6) を収束するまで計算することにより、1 cell 以遠の部分の level set 関数を構築する。

$$\frac{\partial f_{ls}}{\partial \tau} = S(f_{ls})(1 - |\nabla f_{ls}|), \quad (6)$$

ここで、 τ は artificial time、 S は smoothed sign function:

$$S(f_{ls}) = \frac{f_{ls}}{\sqrt{f_{ls}^2 + \varepsilon^2}}. \quad (7)$$

である[‡]。そして、re-initialization エラーのない f_{zero} を元に計算を繰り返す。

ここで、 f_{zero} から f_{ls} を構築する計算方法について補足しておく。Eq. (6) の収束計算の 1 cell 以遠の初期値として、前の計算ステップの f_{ls} や 1, -1 等を使うのではなく、何らかの方法で Eq. (1) を計算した値を用いると収束が大幅に早まる。この移流計算にも CIP 法を用いても良いが、この計算に関しては 1 次の風上差分でも良いようである。低精度の方法によりエラーが混入しても Eq. (6) の計算により補正される。この計算において、境界から one cell 以遠の cell (実際は narrow band 内だけ) に対しても収束計算を必要としない fast marching 法を使うこともできるが、この方法は上で紹介した方法より一般に計算時間を必要とするため今回は用いなかった。一方、Sussman の方法は、収束計算を必要とするが、基本的に移流方程式を計算したときの誤差を補正するだけなので、収束回数、計算対象に依存するが一般に少なく、計算時間を抑えることができる。従来の Sussman 等の方法では、iteration の間に zero-level set がずれるという問題があるが、本計算では zero-level set 周辺の値が fast marching 法により事前に計算され、収束計算時には固定されているため、その問題は起こらない。

実際の流体計算等で必要になる物質の識別に用いる color (density) function f_{color} は、 f_{ls} から smoothed Heaviside function H_α を用い計算することができる。

$$f_{color} = H_\alpha(f_{ls}), \quad (8)$$

$$H_\alpha(f_{ls}) = \begin{cases} 0 & \text{if } f_{ls} < -\alpha \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{f_{ls}}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} f_{ls}\right) \right] & \text{if } |f_{ls}| \leq \alpha \\ 1 & \text{if } f_{ls} > \alpha, \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 2α は境界のスムージングの幅である。level set 関数が距離関数の性質を持っているためスムージングの幅を容易にコントロールすることができる。

[†]広い意味で言えば、zero-level set 追跡専用の関数 f_{zero} も level set 関数であり、その zero-contour は zero-level set であるが、本論文では距離関数の性質を持つ関数のみを level set 関数と呼び、level set 関数の zero-contour のみを zero-level set と呼ぶことにする。

[‡]zero-level set 周辺の f_{ls} を固定しているため $S(f_{ls}) = 1$ としても良いかも知れないが、計算の安定のために残したほうが良い。

III. 計算結果

本計算手法を CIP-CUP 法など [4-7] と組み合わせ、三相 (固気液) 相互作用の数値シミュレーションを行った結果を Fig. 3(右) に示す。少ない格子数 (計算格子は 40×40 、長方形の剛体は 8×12) にもかかわらず形状を良く捕らえていることが分かる。Fig. 4 は三次元の計算例である。計算格子は $40 \times 40 \times 40$ 、剛体は $8 \times 8 \times 12$ により表現されている。

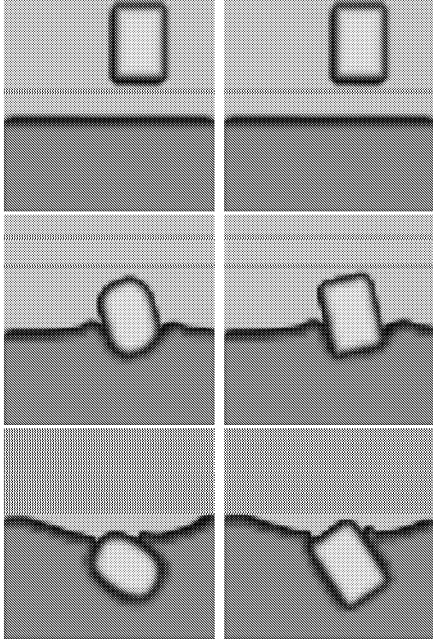


FIG. 3. The rectangular rigid body fallind into the liquid. The figures show the time series by the medefied level set method (left side) and the original level set method (right side). The density ratio of gas:liquid:solid is 1.25 : 1000 : 500. 40×40 computational grids were used. The rectangular rigid body is represented by 8×12 grids. Animation files are aveilable on [9].

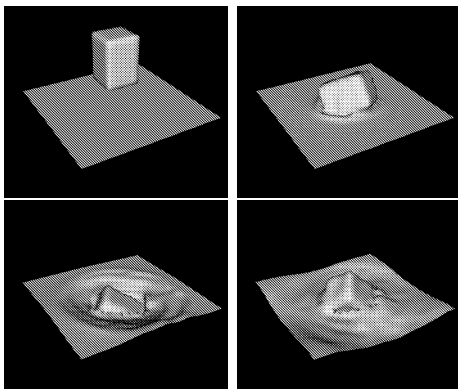


FIG. 4. An example of three dimensional calculation. $40 \times 40 \times 40$ computational grids were used.

-
- [1] S. Osher and J.A. Sethian, *J. Comput. Phys.* **79**, 12 (1988).
 - [2] M. Sussman, P. Smereka and S. Osher, *J. Comput. Phys.* **114**, 146 (1994).
 - [3] J.A. Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press (1999).
 - [4] T. Yabe and T. Aoki, *Comput. Phys. Commun.* **66** 219 (1991).
 - [5] T. Yabe and P.Y. Wang, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 2105 (1991).
 - [6] F. Xiao et al., *Comput. Phys. Commun.* **102** 147 (1997), *J. Comput. Phys.* **155**, 348 (1999).
 - [7] T. Nakamura and T. Yabe, *Comput. Phys. Commun.* **120** 122 (1999).
 - [8] J.U. Brackbill, D.B. Kothe and C. Zemach, *J. Comput. Phys.* **100**, 335 (1992).
 - [9] <http://hellfire.riken.go.jp/%7Ekensuke>.