

外挿流束法による圧縮性流体の接触不連続の計算

Computation of Contact Discontinuity with Extrapolated Flux Method in Compressible Flow

馬場隼人, 東北大院, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 01, E-mail: baba@cfm.mech.tohoku.ac.jp
 澤田恵介, 東北大院, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 01, E-mail: sawada@cfm.mech.tohoku.ac.jp
 Hayato Baba, Dept. of Aeronautics and Space Eng., Tohoku Univ., Aoba-yama 01, Sendai 980-8579, Japan
 Keisuke Sawada, Dept. of Aeronautics and Space Eng., Tohoku Univ., Aoba-yama 01, Sendai 980-8579, Japan

A numerical method that can resolve a contact discontinuity quite sharply on Eulerian grid is proposed. Assuming that a front tracking algorithm such as the level-set method gives the interface position, the present method determines the numerical flux function at the nearby interface by extrapolation. Except for that interface, the numerical flux function is given by the conventional upwind scheme. For typical test problems, the present method is shown to resolve a contact discontinuity accurately.

1. はじめに

異なる流体間の接触境界面は、時として力学的に不安定となり、大規模な形状変化を伴う複雑な流れ場を形成する。この現象は、対流雲の発生、地球内部のマントルの動き、超新星爆発といった自然現象のほか、燃焼面や二層剪断流、核融合の燃料圧縮過程などでも観察され、広汎な分野にまたがる問題である。工学的な応用においては現象の詳細な理解が不可欠であるが、実験による観測が困難な場合が少なくない。そのため、数値計算には大きな期待が寄せられている。このような流れ場の計算で特に重要とされるのは、境界面の位置を正確に追跡できることであり、同時に接触不連続を鮮明に捉えられることが求められている。

数値計算手法は、計算格子の違いによって Euler 格子法と Lagrange 格子法に大別される。流体の計算で一般的な Euler 格子法は、数値拡散によって接触不連続が移動とともに不鮮明になる傾向をもつ。そのため、特に接触不連続を鮮明に捉えるには ALE をはじめとする Lagrange 格子法が広く用いられている。しかし、境界面が大規模に変形する場合に格子生成が非常に困難になるという問題が指摘されている⁽¹⁾。

ここでは、Euler 格子上で接触不連続面位置に生じる数値拡散を低減することを考える。境界面の追跡と不連続の維持を別の問題として扱い、あらかじめ境界面の位置を求めておく。この情報をもとに境界面付近の数値流束を外挿することで、Euler 格子上で圧縮性流体の接触不連続を鮮明に捉えることのできる計算手法の構築を試みた。

2. 計算手法

圧縮性流体を取り扱うために、スキーム全体は数値流束を用いた保存形で構成される。本手法において特別な取り扱いをするのは接触境界面付近だけで、それ以外には一般的な高次精度風上法を用いる。今回は高次精度化に MUSCL 法を用いた。

境界面付近の数値流束を求めるにあたり、境界面の位置をあらかじめ求めておくことが必要となる。この境界面追跡法は任意である。近年、CIP 法⁽²⁾や Level-Set 法⁽³⁾などといった手法が提案されており、その有効性が指摘されている。今回は、Level-Set 法の一つである PDE-Based Fast Local Level-Set 法⁽⁴⁾を用いて流体の境界面を追跡した。これは境界面付近のみに Level-Set 法を適用するもので、従来に比べ計算時間を大幅に短縮できる。

境界面付近の数値流束は、周囲のセルの物理量を用いて外挿される。その具体的な手法については次節で述べる。

時間発展手法には Euler 陽解法を用いた。

3. 境界面付近の数値流束

1 次元の場合

簡単のために、まずは次の 1 次元線形移流問題を考える。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Fig.1 において底面は時刻 n t 、上面は時刻 $(n+1)$ t におけるセルの状態を表している。

時刻 n t において境界面が i 番目のセル内部に位置する場合、1 次元問題では、このセルの両側にあたる $i-1/2$, $i+1/2$ 番目のセル境界が外挿の対象となる。まず、これらのセル境界に対し、境界面の移動を線形補間して時間軸上における流体 1 の占める割合 σ を以下のように求める。

$$\sigma_{i-1/2} = \begin{cases} \frac{s^n - x_{i-1/2}}{s^n - s^{n+1}} & \text{if } s^{n+1} < x_{i-1/2} \\ 1 & \text{if } s^{n+1} \geq x_{i-1/2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } s^{n+1} \leq x_{i+1/2} \\ \frac{s^{n+1} - x_{i+1/2}}{s^{n+1} - s^n} & \text{if } s^{n+1} > x_{i+1/2} \end{cases}$$

ここで x はセル境界の位置、 s^n, s^{n+1} はそれぞれ時刻 n t , $(n+1)$ t での境界面の位置を表す。最終的にセル境界の数値流束 \tilde{f} は、周囲のセルの物理量を用いて以下のように外挿した。

$$\tilde{f}_{i-1/2} = [\sigma_{i-1/2} q_{i-1} + (1 - \sigma_{i-1/2}) q_i] u_{i-1/2}$$

$$\tilde{f}_{i+1/2} = [\sigma_{i+1/2} q_{i+1} + (1 - \sigma_{i+1/2}) q_i] u_{i+1/2} \quad (3)$$

境界面とセル境界の位置が一致する場合、風上側の物理量を用いて数値流束を求める。例えば $s^n = x_{i+1/2}$ のときは、次式のようになる。

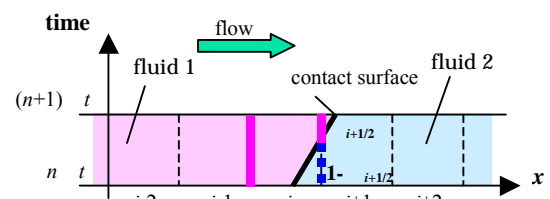


Fig.1 Contact surface propagating across a cell boundary

$$\sigma_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } s^{n+1} < x_{i+1/2} \\ 0.5 & \text{if } s^{n+1} = x_{i+1/2} \\ 1 & \text{if } s^{n+1} > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\tilde{f}_{i+1/2} = [\sigma_{i+1/2} q_i + (1 - \sigma_{i+1/2}) q_{i+1}] u_{i+1/2} \quad (5)$$

以上が、1次元の場合の取り扱いである。

2次元の場合

2次元の場合も基本的には1次元と同様である。接触境界面はセル内で1つの直線であると仮定すると、境界面付近の流体の分布はおよそ以下の3つの形状に大別される。

- (a) 境界面がセルを左右に分ける場合
- (b) 境界面がセル境界に一致する場合
- (c) 境界面がセルを斜めに分ける場合

Fig.2 はそれを図にしたものである。灰色で示したセルは境界面を含むセルを表し、太線は境界面である。ピンクや水色のセルは、それぞれ流体1、流体2で満たされたセルを表している。また、青のラインはそれぞれの場合について、外挿の対象となるセル境界を示している。実際には、これら3つの回転を含めて全部で8通りの形状を考慮する。

Fig.3 は、時刻 n t において Fig.2(a) のような分布を持つ場合の例である。便宜上、手前側の平面 ($y = (j-1/2) y$) の色付けを省略してある。2次元の場合、各セル境界を時間軸方向に伸ばした平面を考えて、その平面上で流体1の占める割合を求め、図中、濃く示された平面について、それぞれピンク色が占める部分の割合を求めればよい。Fig.3 のような場合、以下ようになる。

$$\sigma_{i-1/2,j} = 1$$

$$\sigma_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{s_{j-1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{s_{j-1/2}^{n+1} - s_{j-1/2}^n} + \frac{s_{j+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{s_{j+1/2}^{n+1} - s_{j+1/2}^n} \right\}$$

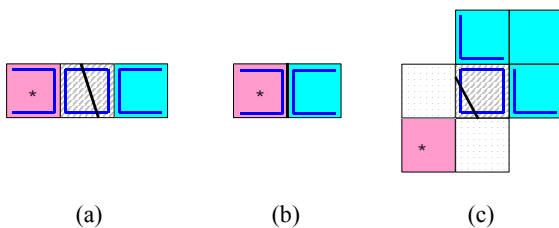


Fig.2 Geometric patterns and cell boundaries to be extrapolated

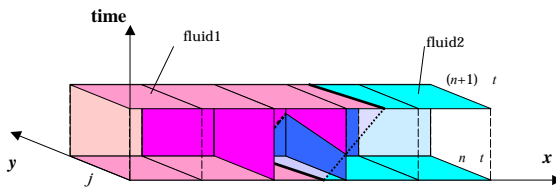


Fig.3 Detail of extrapolation about a case of Fig.2(a)

$$\sigma_{i-1,j+1/2} = 1$$

$$\sigma_{i,j+1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_{i+1/2} - s_{j+1/2}^n}{s_{j+1/2}^{n+1} - s_{j+1/2}^n} \right) \left(\frac{x_{i+1/2} - s_{j+1/2}^n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_{i+1,j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{j+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{s_{j+1/2}^{n+1} - s_{j+1/2}^n} \right) \left(\frac{s_{j+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}} \right)$$

$$\sigma_{i-1,j-1/2} = 1$$

$$\sigma_{i,j-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_{i+1/2} - s_{j-1/2}^n}{s_{j-1/2}^{n+1} - s_{j-1/2}^n} \right) \left(\frac{x_{i+1/2} - s_{j-1/2}^n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \right)$$

$$\sigma_{i+1,j-1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{j-1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{s_{j-1/2}^{n+1} - s_{j-1/2}^n} \right) \left(\frac{s_{j-1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}}{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}} \right)$$

ここで $s_{j+1/2}$ は $y = (j+1/2) y$ における境界面の位置である。

Fig.3 では時刻 $(n+1) t$ において境界面は $y = (j-1/2) y$, $y = (j+1/2) y$ とともに右隣のセルに移動しているが、移動の方法はこれ以外にも考えられる。まとめると以下ようになる。

- (a-1) 両方とも右隣のセルに移動する場合
- (a-2) 片方のみ右隣のセルに移動する場合
- (a-3) 両方とも同じセル内にとどまる場合
- (a-4) 片方のみ左隣のセルに移動する場合
- (a-5) 両方とも左隣のセルに移動する場合
- (a-6) 一方は右隣、もう一方が左隣のセルに移動する場合

細部は異なるが、いずれの場合も同じように定式化する。これは、Fig.2 の (b), (c) についても同様である。

セル境界の物理量 \tilde{q} は、最終的に次式で求める。

$$\tilde{q} = \sigma q_* + (1 - \sigma) q \quad (7)$$

ここで、 q_* , q は外挿の基準であり、Fig.2 において *、で示したセルの物理量である。

4. システム方程式への適用

システム方程式では、接触境界面をはさんで不連続となる物理量に対し本手法を用いる。それ以外の物理量は、通常通りに内挿する。今回は、セル境界の密度を求める際に本手法を適用し、数値流束を AUSM 法⁽⁵⁾で求めた。

5. 計算結果

まず1次元移流問題の計算例を示す。

Fig.4 は、式 (1) に従いステップ状の波を伝播させた結果である。速度 1.0、格子点数 100 点で CFL=0.3、時刻は 0.2、初期条件は以下の通りである。

$$q = \begin{cases} 1 & (x < 0.5) \\ 0 & (0.5 \leq x) \end{cases} \quad (8)$$

Fig.4 において緑色で示したのが通常の1次精度風上法、青はそれを MUSCL 法により2次精度にしたもの、赤は今回の手法で得られた計算結果である。この計算では MUSCL 法による高次精度化は行っていないが、得られた結果は解析解に一致することがわかる。

Fig.5 は、MUSCL 法の有無による違いを明らかにするために、正弦波を組み合わせた波を伝播させた結果である。初期条件は以下の通りであり、計算条件は Fig.4 と同じである。

$$q = \begin{cases} 0 & (x < 0.25) \\ \sin \{2\pi(x - 0.25)\} & (0.25 \leq x < 0.5) \\ -\sin \{2\pi(x - 0.25)\} & (0.5 \leq x < 0.75) \\ 0 & (0.75 \leq x) \end{cases} \quad (9)$$

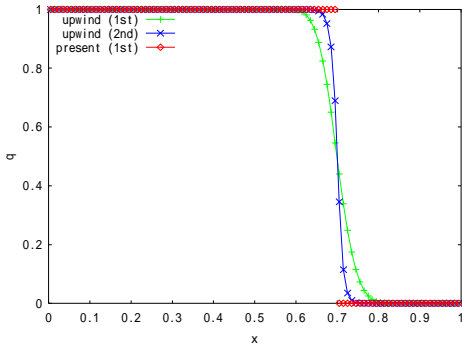


Fig.4 One dimensional linear advection (step wave)

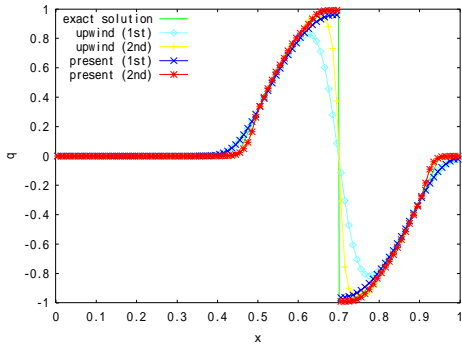


Fig.5 One dimensional linear advection (sine wave)

Fig.5 において、水色と黄色は通常の風上法を用いた結果であり、青と赤のグラフは本手法を用いたものである。このうち、黄色と赤には MUSCL 法を用いた。緑色で示すのは解析解である。通常の風上法では数値拡散のため波形が崩れているのに対し、本手法では不連続が鮮明に捉えられている。本手法と MUSCL 法を併用することで、波形の崩れが低減され不連続をより鮮明に捉えられることがわかる。

次に 2 次元の結果を示す。

Fig.6 は 2 次元移流問題を解いた結果である。Fig.6(a) は初期条件、(b) は通常の 2 次精度風上法、(c) が今回の手法を用いた結果である。計算領域は 1.0×0.25 、格子点数 100×25 、移流速度成分 $(2.0, -2.0)$ 、 $CFL=0.3$ 、時刻は 0.4 である。このような平面波の移流に対し、本手法が解析解を与えることが確認できる。

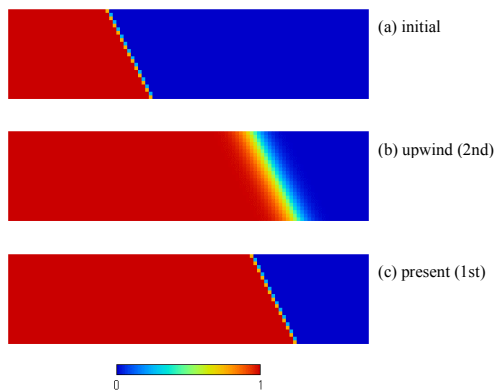


Fig.6 Two dimensional uniform flow (plane wave)

Fig.7 は、境界面が平面でない場合の計算結果である。境界面は半径 0.2 の円で、中心から速度 $(1.0, 2.0)$ で移流している。計算領域は 1.0×1.0 、格子点数は 100×100 、 $CFL=0.2$ 、時刻は 0.1 、円の内部は $q = 1$ である。本手法を用いたものが、境界面の不連続を鮮明に捉えている。ただ、わずかながら極値を作り出していることが観察できる。そこで、VOF 法の誤差評価法⁽⁶⁾にならない、次式によって誤差の評価を行った。

$$E = \frac{\sum |q_{results} - q_{exact}|}{\sum q_{initial}} \quad (10)$$

ここで $q_{initial}$ 、 q_{exact} 、 $q_{results}$ は、それぞれ物理量の初期値、解析解、計算結果を表している。その結果を Table 1 に示す。本手法の誤差は、2 次元において境界面がセル内で 1 つの直線であると仮定したために生じるが、通常の風上法よりもはるかに小さい。

Fig.8 は、非一様流の計算結果である。計算領域は 4.0×4.0 、格子点数は 100×100 、速度場 (u, v) は式 (11) で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= -(y - 2.0) / 2 \\ v &= (x - 2.0) / 2 \end{aligned} \quad (11)$$

初め $(2.00, 2.75)$ にあった半径 0.5 の円が、 $CFL=0.3$ で反時計回りに 1 回転した状態を表している。

Table 1 Moving circle problem

| scheme | error |
|---------------|----------|
| upwind (2nd) | 1.09e-01 |
| present (2nd) | 2.41e-02 |

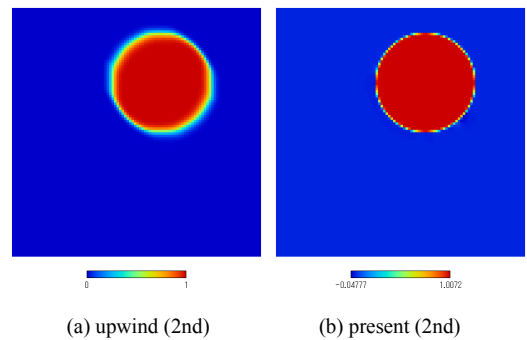


Fig.7 Two dimensional uniform flow (circle)

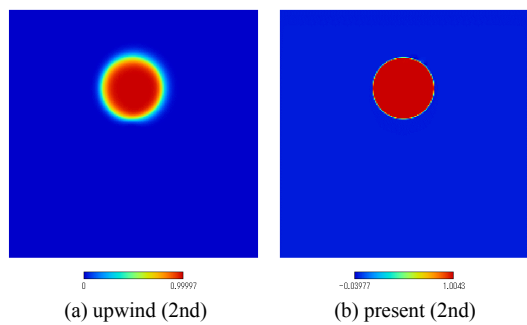


Fig.8 Two dimensional vertex flow

境界面近傍でわずかな極値が生じているが、非一様流においても境界面を鮮明に捉えられていることが確認できる。

最後に、システム方程式での計算結果を示す。

Fig.9 は、1次元の標準衝撃波管問題の計算結果である。初期条件を Table 2 に示す。支配方程式は1次元 Euler 方程式、比熱比 1.4、格子点数 200、CFL=0.2、時刻 0.14154 における密度の分布を示している。通常の AUSM 法に比べて、境界面が鋭く捉えられており、数値的な振動も生じていない。衝撃波や膨張波も、問題なく捉えられている。

Fig.10 は、2次元 Euler 方程式の計算結果である。原点を中心とする半径 $\sqrt{2}/2$ の円の内部を高圧部、外側を低圧部として時刻 0 で破膜させた。高圧部、低圧部の初期状態は Table 2 の値と同じである。計算領域は 1.0×1.0 で、格子点数 100×100 、比熱比 1.4、CFL=0.2 で、図は時刻 0.14154 における密度の分布を示す。1次元軸対称の流れ場を形成し、円弧上に伝播する衝撃波や接触境界面、膨張波が確認できる。Fig.10(b) は、そのときの流体の分布を表しており、青色で示した境界面をはさんで流体が識別されているのがわかる。

Table 2 Initial conditions for shock tube problem

| | driver | driven |
|----------|--------|--------|
| density | 1.000 | 0.125 |
| velocity | 0.000 | 0.000 |
| pressure | 1.000 | 0.100 |

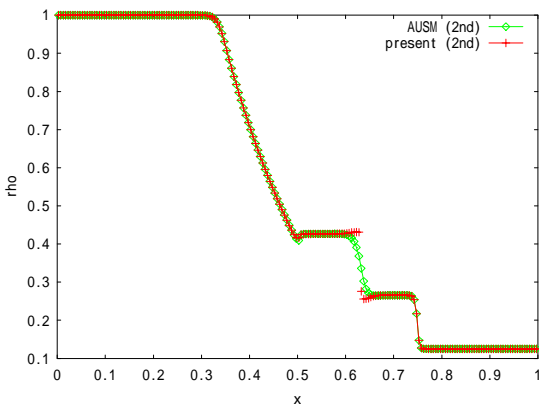


Fig. 9 Standard shock tube problem

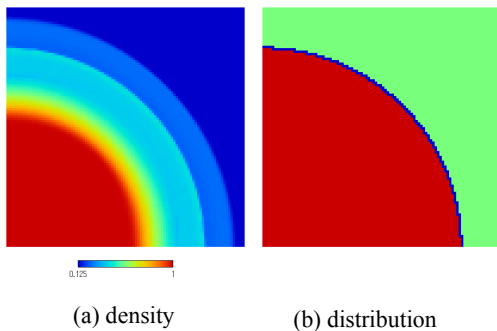


Fig. 10 Cylindrical shock tube (2nd order calc.)

6. まとめ

いくつかの基本的な問題に対して、外挿を用いて境界面付近の数値流束を構築することで Euler 格子上でも接触不連続を鮮明に捉えられることが示された。場合によっては極値を作ることがあり、この点についてはさらなる検討が必要である。

参考文献

- (1) C.W.Hirt, A.A.Amsden and J.L.Cook, *J. Comp. Phys.*, **14** (1974), pp. 227-253.
- (2) H.Takewaki, A.Nishiguchi and T.Yabe, *J. Comp. Phys.*, **61** (1985), pp. 261-268
- (3) S.Osher and J.A.Sethian, *J. Comp. Phys.*, **79**(1988), pp. 12-49.
- (4) D.Peng, B.Merriman, S.Osher, H.Zhao and M.Kang, *J. Comp. Phys.*, **155**(1999), pp. 410-438
- (5) M.S.Liou and C.J.Steffen, Jr., *J. Comp. Phys.*, **107**(1993), pp. 23-39
- (6) M.Rudman, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **24**(1997), pp. 671-691