

非圧縮性流れにおける AMR アルゴリズムの開発

<Development of Adaptive Mesh Refinement Algorithm for Incompressible Flow>

池 東煥, 北陸先端科学技術大学院大学, 石川県能美郡辰口町旭台 1-1, E-mail: d-chi@jaist.ac.jp

古山彰一, 富山商船高専, 富山県新湊市海老江練合 1-2, E-mail: shoichi@toyama-cmt.ac.jp

松澤照男, 北陸先端科学技術大学院大学, 石川県能美郡辰口町旭台 1-1, E-mail: matuzawa@jaist.ac.jp

DongHwan CHI, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1-1, Asahidai, Tatsunokuchi, Nomi, Ishikawa, Japan
Sho-ich FURUYAMA, Toyama National College of Maritime Technology, 1-2, Neriya, Ebie, Shinminato, Toyama, Japan
Teruo MATSUZAWA, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1-1, Asahidai, Tatsunokuchi, Nomi, Ishikawa

<Abstract> Adaptive Mesh Refinement (AMR) algorithm has been used extensively to solve a variety of problem in hyperbolic conservation laws and more recently has been extended to incompressible flow. We present an algorithm to compute adaptive solutions for incompressible flows using AMR method in both space and time. Using the method, we could get the increased solution accuracy due to local refinement.

1. はじめに

複雑な物体周りの流れ場を検証する際、精度、効率共に満たされる計算格子を張ることは難しく、計算機の能力が向上したとはいえ、人間が実際行う場面が少なくはない。正方格子もしくは立方体格子を用いることで精度の高い計算が行う試みがなされている。これらの手法は、大型計算機を使用することで多数の計算格子を使用し、立方格子と言えとも物体形状を良く捉え、比較的の高い精度で計算が可能であることを示している。しかしながら、等体積の立方格子を計算空間全体に適用するため、それほど高い精度の必要ない部分や、物体近傍などの高い精度の要求される部分と同じサイズの格子で解いてしまう事を避けられず、結果として、計算コストが非常に高い手法には変わりがない。このような問題に対処するために、立方格子を利用しながら、局所的に格子を細分化する AMR 法を用いることが注目されつつある。AMR 法は 1980 年代に Berger, Olinger と Colella によって提案され、その法は物理量の変動に併せて、高精度の必要な領域を予測し、自動的にその領域の格子を細分化する手法である。当時は乏しい計算資源をどのように有効利用するかという背景から考えられたものであった。これでは、飛行機の翼周りの解析や圧縮性流体の多様な問題を解くために使われてきて、近年では、非圧縮性流体モデルにも適用されつつある。非圧縮性流れの場合は本質的に局所的に細分化がかなり難しい。これは発散自由(divergence-free constraint)を表す方法が明確でないからである。本研究では非圧縮性流体モデルに適した AMR 法のアルゴリズムの開発を目標とする。

2. 手法

この章では、基礎方程式、Projection Method、適応格子法、圧縮性流体での AMR 法と非圧縮流体での AMR 法の比較について言及する。

2.1 基礎方程式

本研究では、粘性を考慮していない非圧縮性オイラー方程式を用いる。オイラー方程式は以下のものである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

$$u \cdot n = 0 \quad (4)$$

(1)は連続方程式、(2)、(3)は運動方程式、(4)の u は壁境界の速度ベクトル、 n は壁境界に対し外向きの法線ベクトルである。

ここで、 u, v は各々の速度、 p は圧力である。

2.2 Projection Method

非圧縮オイラー方程式は解を求める数値方法が明白ではないし、連続式は圧力の Evolution 方程式をもっていないため、(1)と(2)、(3)式を変換する。変換した式は以下のようにになる。

$$w = w_d + \nabla \Phi \quad (5)$$

$$\nabla \cdot w_d = 0 \quad (6)$$

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot w \quad \text{on } \Omega \quad (7)$$

$$w_d \cdot n = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} = w \cdot n \quad \text{on } \partial \Omega \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} w_d \cdot \nabla \Phi dx = 0 \quad (9)$$

式(7)と発散自由項を引くことによって、

$$P : P(w) = w_d \quad (10)$$

ここで、 P は orthogonal projection である。正式的に書くと、

$$P = I - \nabla(\Delta)^{-1} \nabla \quad (11) \text{ になる。}$$

式(11)を使って、式(1)と(2)、(3)式を変換する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(-u \cdot \nabla u) \quad (12)$$

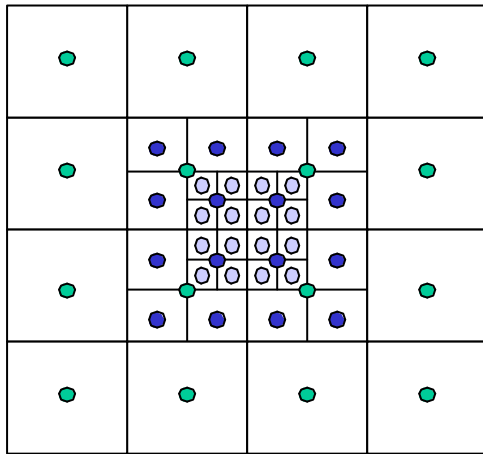
$$\nabla \cdot u(\cdot, t=0) = 0 \quad (13)$$

を得る。

上記の式を Multilevel Projection Algorithm (fig.5)に取り入れて非圧縮オイラー方程式の時間ステップを求める。

2.3 適応格子法

適応格子法(AMR: Adaptive Mesh Refinement method)は、Berger と Colella によって研究された手法である。これは物理的な変動の激しい領域や物体近傍などで、その領域の物理状態を詳細に示すことが出来る手法である。この手法は、物理状態に応じて局所的に格子を細分化することから、非定常の問題に対して非常に有効であり、また、不必要に格子を増やすことをしないために計算コストの点で非常に優れた手法であるといえる。Fig.1は適応格子を流れ場に適用した時の配置の例を示している。



- 0 Level data
- 1 Level data
- 2 Level data

Fig.1. Block-structured local refinement

3. 圧縮性流体と非圧縮流体での AMR 法の比較

この章では圧縮性流体と非圧縮性流体での AMR 法の適用にあたって異なる点について比較検討する。

3.1 圧縮性流体での AMR 法

・分割指針と内挿について

任意の時間に物理量の状態を見ることによって、格子の配置を局所的に変更していく。この場合格子の配置の変更とは、初期条件で使用していた格子を局所的に細分化することである。細分化の基準はさまざまな方法があるが、物理量として密度、速度、圧力があるが、圧縮性流体の場合は密度の変化をみて細分化するのが一番考えられる。分割指針によく用いられる方法でレルナー指針値と呼ばれるものがある。(Fig.2) この指針値は物理量の勾配が大きい領域の前後で大きな値を取るようになる。レルナー指針値の適用位置は不連続面で指針値をたて細分化を行う。細分化される事で生成された格子のデータを何らかの形で得ることが必要である。それは、より荒い格子のデータを用いてより細かい格子のデータを内挿によって求める。

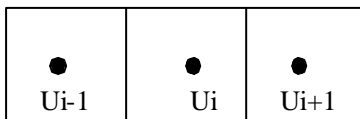


Fig.2 Löhner indicator

・流れ場に混在された格子を解く方法について

格子の分割指針によって分割された格子により、計算領域には大小の格子が混在することになる。(Fig.1)この問題を解くために Fig.3 を用いる。細分化格子での物理量は t 刻める間に複数回の計算を行う必要があるので、計算バッファを適切に与える必要がある。そのバッファについては、同レベルの細分化格子が隣接している場合はお互いにその値を利用する。一方、粗い格子と接しているような場合は、レベル0の格子を一番始めに t 刻めるので、時間について一次の内挿を行い必要データとする。

	1	2	3	4	5	6	7
Lev 0(t)	●						
Lev 1($t/2$)		●			●		
Lev 2($t/4$)			○	○		○	○

Fig.3. Time schedule

3.2 非圧縮性流体での AMR 法

・分割指針と内挿について

非圧縮性流体の場合、物理量として密度が一定のために速度と圧力が挙げられる。初期サイズの格子を細分化する基準として速度を適用する。計算領域内の一番速度が大きいのを検索してその大きさの80%以内の格子を1段階(レベル1)細分化する。このことを繰り返して行うことで、レベルごとに細かく格子を細分化できる。細分化されることで生成される格子のデータを何らかの形で得ることが必要である。Fig.4は2次元内挿について示している。レベルごとに計算するために Coarse-fine 境界面の部分はあらかじめ ghost cell(circled X's in fig.4)を内挿する。内挿したのを式(14)、(15)に適用する。以下の式(14)、(15)は隣接する格子の勾配を表す。

$$G^{comp}(\Phi)_{i+1/2,j}^x = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \quad (14)$$

$$G^{comp}(\Phi)_{i,j+1/2}^y = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \quad (15)$$

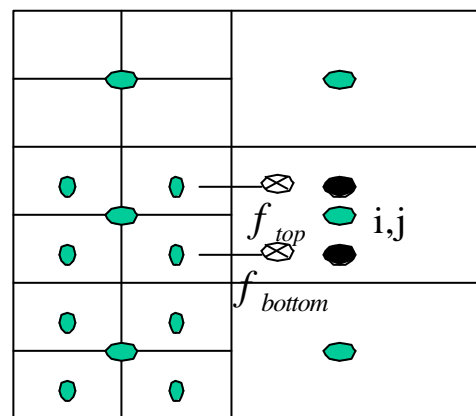


Fig.4 Interpolation at a Coarse-fine interface

・移流速度の計算について

レベルの違う格子が接しているようなところで流速の不一致が起こると考えられる。このことにより、細分化された格子点の平均を取ることにして計算する。(Fig.5)

* Coarse-fine 境界面がある時とない時の流束計算

$$(D^{comp,\lambda} u^{edge})_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j}^{edge} - u_{i-1/2,j}^{edge}}{h_x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{edge} - v_{i,j-1/2}^{edge}}{h_y} \quad (16)$$

$$(D_{coarse} u^{edge})^{r_1} = \frac{u_{i+1/2,j}^{edge} - u_{i-1/2,j}^{edge}}{h_x^{r_1}} + \frac{v_{i,j+1/2}^{edge} - v_{i,j-1/2}^{edge}}{h_y^{r_1}} \quad (17)$$

$$\langle u^{edge,\lambda+1} \rangle_{i-1/2,j}$$

細分化された格子の平均である。

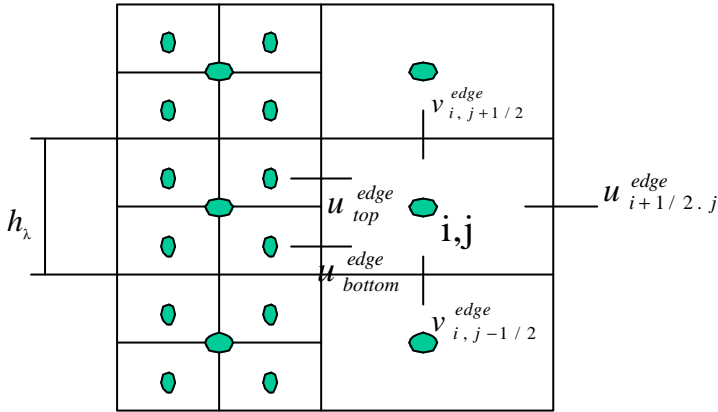


Fig.5 Coarse-fine interface with an edge-centered vector field

・ Multilevel Projection アルゴリズムについて

アルゴリズムは Fig.11 に示す。このアルゴリズム⁶は非圧縮性オイラー方程式を解くために提案された。このアルゴリズムは細分化を行った後、レベルごとにどのように計算するかアルゴリズムである。細分化された格子が初期(ここではL)の格子より時間ステップが小さいため、細分化された格子と初期の格子を合わせるためにアルゴリズムの最後に同期を取っている。

4. 数値計算

下記の計算は圧縮性流体モデルの計算⁵を示している。Fig.6の左側から、風を送りこんでいる事を仮定する。また、計算領域内の中央には四角形の物体をおく。左側から、速度を $u=2.5$ 与えて、計算領域内では 100×100 メッシュを用いて計算している。圧力残差が 10^{-4} の時、格子点の最大速度を見つけてその 80% 以内であれば細分化を行うとする。これを繰り返し替えることによって Fig.9 の最終結果が得られる。高精度の必要な領域を予測し、自動的にその領域の格子を細分化することで高精度の流れが実現できた。本研究では圧縮性で用いたモデルを使って、非圧縮性流れの流れを目指す。

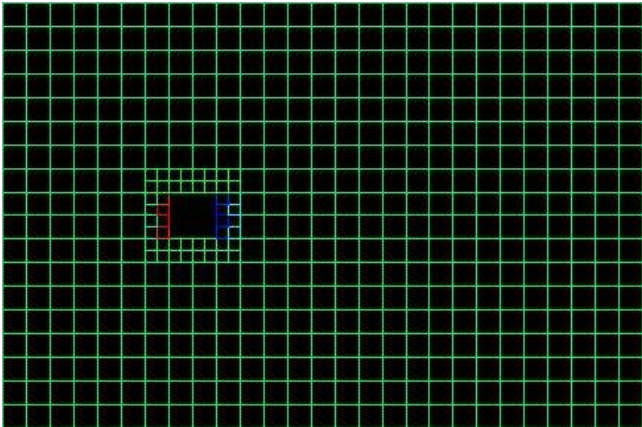


Fig. 6. Computational region (Level 0)

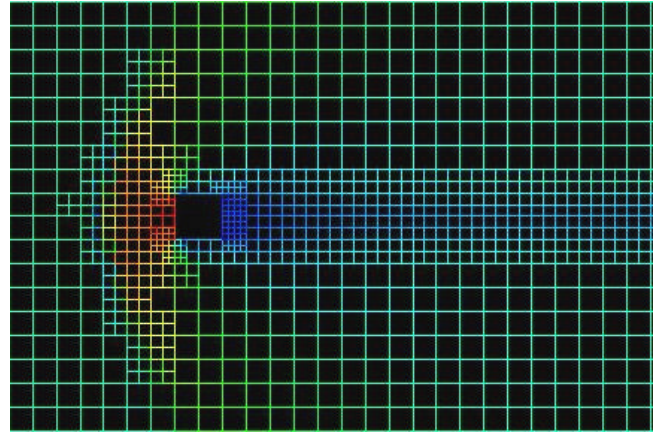


Fig. 7. Level 1 (AMR method)

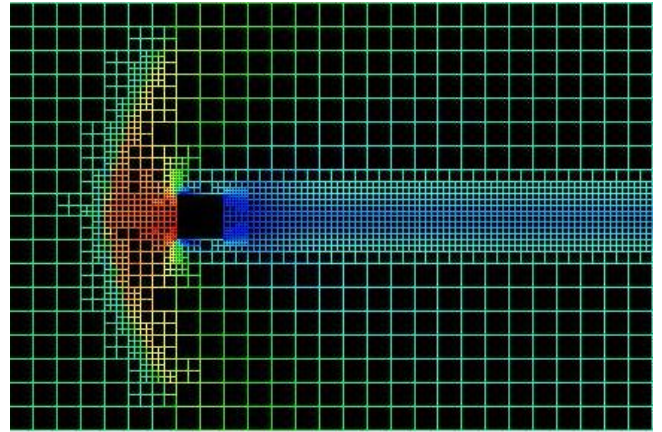


Fig. 8. Level 2 (AMR method)

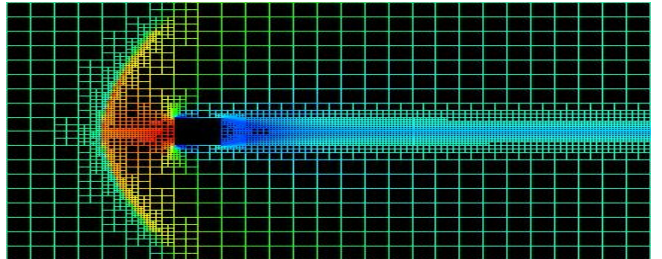


Fig. 9. Level 3 (AMR method)

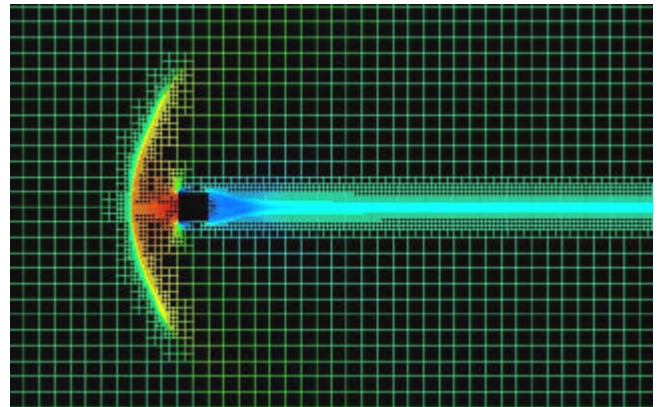


Fig.10. Final result (AMR method)

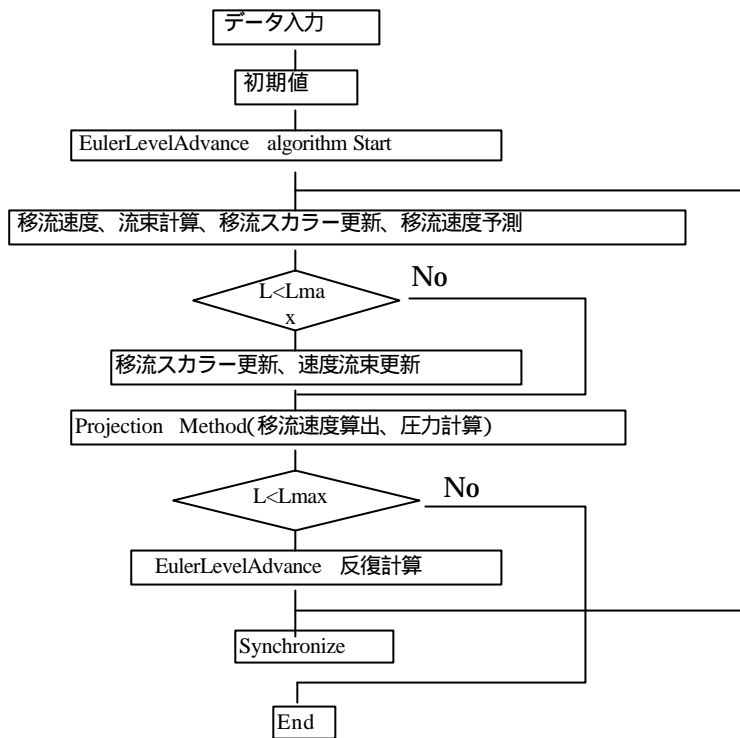


Fig.11 Multilevel Projection Algorithm

5. 検討課題とまとめ

本研究では非圧縮性オイラー方程式のためのアルゴリズムを示したが、実際の流れの問題に対し、まだ検討している途中であって結果は出ていない。圧縮性流体で用いた計算モデルを使って本研究で示したアルゴリズムを用いて非圧縮性流体モデルの解析を行う。解析解が存在するモデルを検証するのが比較検討を行うとき、非常に分かりやすいが、実際のところ流れがあるモデルの場合、解析解が存在するのはめったにない。そのため、本研究では計算モデルの x 、 y を細かくした結果（2次精度）と AMR 法を用いて細分化した結果との誤差を調べ、AMR 法を導入することによって精度が向上するかを調べる。また、本研究では粘性を考慮していない非圧縮性オイラー方程式を用いたが、粘性を考慮した Navier-Stokes 方程式の非圧縮性流れについて考える。

参考文献

- [1] 広田良吾著 差分学入門、培風館、1998
- [2] 八田夏夫 著 流れの計算、森北出版、1994
- [3] 小国力 数値格子生成の基礎と応用、丸善株式会社、1985
- [4] 古山彰一、松澤照男：動的負荷分散を用いた適応格子法の並列計算、情報処理学会論文誌第38巻第9号、p 1869-1877(1997)
- [5] 古山彰一、北陸先端科学技術大学院大学修士論文、適合的細分化格子法による圧縮性流体解析に適した並列アルゴリズムの開発、1996
- [6] Daniel F.Martin and Phillip Colella、A Cell-Centered Adaptive Projection Method for the Incompressible Euler Equations,Journal of Computational Physics 163,271-312(2000)