保存解要素法による衝撃波伝播・干渉の数値シミュレーション

Numerical Simulation of Shock Wave Propagation and Interaction Using the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element

○ 今井 靖晃, 京工繊大大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: imai@fe.mech.kit.ac.jp
里深 信行, 京工繊大工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp
Yasuaki IMAI, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

In this paper, the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element (CE/SE) is applied to the implosion/explosion of polygonal shock wave in a box by solving the two-dimensional unsteady Euler equations. The results are compared with those of FDS method coupled with RK2 time integration scheme. It is found that the resolution of shock-shock interaction in CE/SE method is a little bit inferior to that in FDS method, while the CPU time of CE/SE method is significantly shorter.

1. 概要

近年の科学技術の進歩は人類の歴史の中においても特に急激なものであり、我々に多くの夢を与え、実現してきた。しかし科学技術の進歩は一方でより複雑で、実際に実験を行うことが困難な問題を我々に提示し続けており流体工学の分野についても同様のことが言える。この様なコストや時間などの面において実際の実験が困難である現象を、コンピュータにより計算し数値的に解析する計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics) は大変切望されてきた技術であり、また今後の科学技術の進歩の過程で必要不可欠な技術であると言える。計算流体力学の技術は特に機械工学、航空工学において発達してきた。現在では衝撃波を伴う現象を扱う必要性が高まっているが、、衝撃波の取り扱いは容易ではなく、処理の仕方が悪ければ機械の性能に悪影響を与えてしまい、さらに深刻な場合になると破壊に到ることもある。以上の点から衝撃波の挙動を捉えることは非常に重要であると言える。

衝撃波を伴う流れについての数値計算を行う上で重要な事柄は、衝撃波をいかに鋭く捉えられるかということである。しかし従来からの二次精度以上の計算方法では不連続解が原因となり計算過程において振動が生じ、場合によっては発散してしまうという問題がある。そこでこれまでは Jameson の人工粘性 (1) 等により対処して来たが、衝撃の強い流れ場ではある程度振動は収まるが、衝撃波等の不連続解も拡散の対象となり、鋭く現象を捉えられないという問題が生じてくる。そこで全体的に滑らかかつ、衝撃波を鋭く捉える方法の開発が要望されてきた。それに対応して高解像度スキームの一種である、全変動減衰法（Total Variation Diminishing Scheme）(2) が Yee 及び Harten によって提案された。しかし TVD 法は精度は高いが、計算時間が長くなるという問題点がある。

そこで、本報告では圧縮性流れに対する新しいスキームとして、Chang らによって提案された保存解要素法（Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element 以下 CE/SE 法と記す） (3)(4)(5)(6) を取り上げる。このスキームは保存則を解くための新しい計算格子を使うことによって、一般近似リーマン解法等を使うことなく高い精度を維持することが出来る方法である。しかしながら CE/SE 法と従来の方法を実際に直接比較した例はほとんどない。そこで今回の報告では CE/SE 法を Euler 方程式に適用し、従来の方法として時間積分に 2 段階ルンゲクッタ (RK2) 法、空間の離散化に MUSCL 法を用いた FDS 法（以下 FDS 法と記す）を爆縮問題に適用し、衝撃波の伝播や干渉の様子を捉え、直接比較することによって CE/SE 法の特徴を考察する。

2. 基礎方程式

2 次元非粘性圧縮性流れに対する無次元化されたオイラー方程式は、保存則表示で以下のように表される。

$$\frac{\partial q_{\mathrm{m}}}{\partial t}+\frac{\partial f_{\mathrm{m}}^{x}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\mathrm{m}}^{y}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$q_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix},f_{\mathrm{m}}^{x}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(e+p)\end{bmatrix},f_{\mathrm{m}}^{y}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(e+p)\end{bmatrix} \tag{2}$$
$$m=1,2,3,4$$

ここで、 ρ は密度、 p は圧力、u 、 v は x 、 y 方向の速度成分である。また、 e は単位体積当たりの全エネルギーであり、比熱比が γ である理想気体を仮定すると、状態方程式を用いて次のように表すことができる。

$$e=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right) \tag{3}$$

2 次元オイラー方程式のヤコビアン行列は次のように表される。

$$f_{m,l}^{x}=\frac{\partial f_m^x}{\partial q_l} \quad , \quad f_{m,l}^{y}=\frac{\partial f_m^y}{\partial q_l} \quad , \quad m,l=1,2,3,4 \tag{4}$$

3. 数値計算法

3.1 保存・解要素法

初めに 2 次元における保存解要素法の概略を説明する。本スキームでは 1 ステップあたり 2 段階の計算が必要になる。

図 1 においては同一平面上に示してあるが、●における格子点は時間段階 $n+1/2$、○における格子点は時間段階 n における点であるので、後の図 2、図 3 に示してあるように実際には各時間段階において異なる平面上にあり、それぞれの平面において互い違いの格子を用いている事がわかる。

また w は各時間段階における x 軸方向の格子点間距離を示し、h は y 軸方向の格子点間距離を示している。

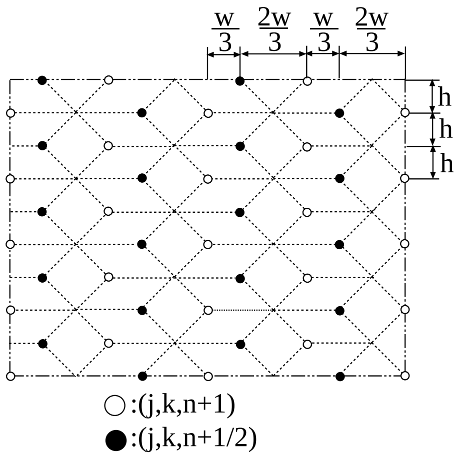

Fig. 1: Mesh

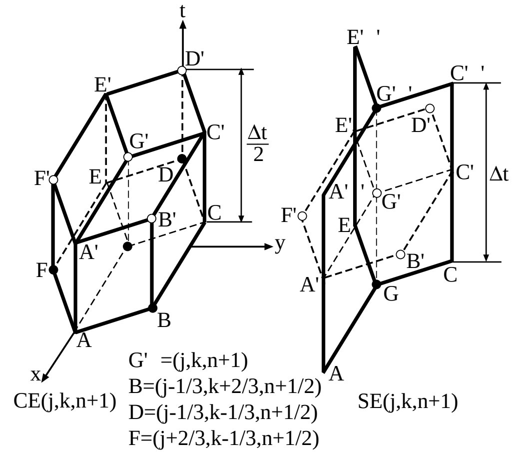

Fig. 3: CE and SE(2)

各段階において用いられる保存要素（Conservation Element 以下 CE）、解要素 (Solution Element 以下 SE) を図 2, 図 3 に示す。

ここで Δt は時間刻み幅である。図 2 ， 図 3 より CE は 6 角柱 $ABCDEF - A'B'C'D'E'F'$ の立体で、また SE は図 2 では 6 角形 $A'B'C'D'E'F'$ と長方形 $BGG''B''$,$FGG''F''$,$DGG''D''$ の、図 3 では 6 角形 $A'B'C'D'E'F'$ と長方形 $AGG''A''$,$CGG''C''$,$EGG''E''$ の 4 平面の集合であることがわかる。

上面を除く CE の境界は、前の時間段階における 3 つの SE の部分集合であることがわかる。また CE の上面の境界は、現在の時間段階における SE によって構成される。SE においては各物理量は一定である。また、CE において流束の総和は 0 であり、ガウスの発散定理を (1) に適用する事で以下の式が得られる。

$$\oint_{S(CE(j,k,n))} \vec{h}\cdot\vec{n}ds = 0 \ \ , \ \ m = 1,2,3,4 \tag{5}$$

$$\vec{h} = (f_m^x, f_m^y, q_m) \ \ , \ \ m = 1,2,3,4 \tag{6}$$

ここで $\vec{n}$ は CE の各表面に対する単位法線ベクトルであり、これらの関係を用いて条件を満たすように離散化を行う。

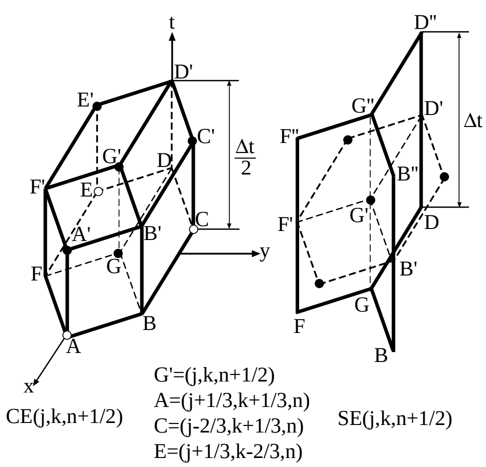

Fig. 2: CE and SE(1)

3.2 二次元オイラー方程式への適用

$(x,y,t) \in SE(j,k,n)$ において $q_m(x,y,t)$ を $(x_{j,k}, y_{j,k}, t^n)$ 周りについて一次精度のテイラー展開を行うと以下のようになる。

$$\begin{aligned} q_m(x,y,t;j,k,n) &= (q_m)^n_{j,k} + (q_{mx})^n_{j,k}(x - x_{j,k}) \\ &+ (q_{my})^n_{j,k}(y - y_{j,k}) + (q_{mt})^n_{j,k}(t - t^n) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで q_{mx}、q_{my}、q_{mt} はそれぞれ $\frac{\partial q_m}{\partial x}$、$\frac{\partial q_m}{\partial y}$、$\frac{\partial q_m}{\partial t}$ を表している。

$f_m^x(x,y,t)$、$f_m^y(x,y,t)$ に対しても同様の展開を行いそれらの式を (1) に代入することで、(7) では SE(j,k,n) において $(q_m)^n_{j,k}$、$(q_{mx})^n_{j,k}$、$(q_{my})^n_{j,k}$ はそれぞれ一定であることから $f_m^x(x,y,t)$、$f_m^y(x,y,t)$ は q_m、q_{mx}、q_{my} 、q_{mt} の関数であることが解る。

また、それらの関係から以下の式が得られる。この関係から $(q_{mt})^n_{j,k}$ も q_m、q_{mx}、q_{my} の関数であることが解る。

$$(q_{mt})^n_{j,k} = -\sum_{l=1}^{4} [f^x_{m,l} u_{lx} + f^y_{m,l} u_{ly}]^n_{j,k} \tag{8}$$
$$, m = 1,2,3,4$$

次にデカルト座標系 (x,y) から一般座標系 (ζ,η) への変換を行う。このとき 2 つの座標系との間には次の関係が存在する。

$$\zeta \mathbf{e}_\zeta + \eta \mathbf{e}_\eta = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \tag{9}$$

この変換によって j 軸と軸方向を共有する ζ 軸、k 軸と軸方向を共有する η 軸が導入される。$\Delta\zeta$、$\Delta\eta$ はそれぞれ $\Delta\zeta = |DB|$、$|CA|$、$\Delta\eta = |DF|$、$|EA|$ を表している。これらの事から次のような関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} (f^\zeta_{m,l})^n_{j,k} \\ (f^\eta_{m,l})^n_{j,k} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} (f^x_{m,l})^n_{j,k} \\ (f^y_{m,l})^n_{j,k} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} (q_{m\zeta})^n_{j,k} \\ (q_{m\eta})^n_{j,k} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^t\begin{bmatrix} (q_{mx})^n_{j,k} \\ (q_{my})^n_{j,k} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc} \frac{w}{\Delta\zeta} & \frac{w}{\Delta\eta} \\ -\frac{h}{\Delta\zeta} & \frac{h}{\Delta\eta} \end{array}\right] \tag{13}$$

$$\begin{aligned} (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k} &= \frac{3\Delta t}{2\Delta\zeta}(f^{\zeta}_{m,l})^n_{j,k} \\ (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k} &= \frac{3\Delta t}{2\Delta\eta}(f^{\eta}_{m,l})^n_{j,k} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (q^+_{m\zeta})^n_{j,k} &= \frac{\Delta\eta}{6}(q_{m\zeta})^n_{j,k} \\ (q^+_{m\eta})^n_{j,k} &= \frac{\Delta\eta}{6}(q_{m\eta})^n_{j,k} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\vec{h} = (f^x_m(\zeta,\eta,t), f^y_m(\zeta,\eta,t), q_m(\zeta,\eta,t)) \tag{16}$$

ここで $\mathbf{T}^{-1}$、$\mathbf{T}^t$ はそれぞれ $\mathbf{T}$ の逆行列、転置行列を示す。

CE の上面を除く他の境界は、前時間段階における 3 つの SE の部分集合である。すべての境界を通る流束 $\vec{h}$ は前時間段階によって計算されるので、以下のように位置を定義することで (5) から次の関係が得られる。

ここで $(j,k,1,r)$、$r=1,2,3$ はそれぞれ図 2 における A、C、E の点を、$(j,k,2,r)$、$r=1,2,3$ はそれぞれ図 3 における D、F、B の点を示す。

$$(j,k;1,1) = j+\frac{1}{3}, k+\frac{1}{3}\ ,\ (j,k;2,1) = j-\frac{1}{3}, k-\frac{1}{3}$$

$$(j,k;1,2) = j-\frac{2}{3}, k+\frac{1}{3}\ ,\ (j,k;2,2) = j+\frac{2}{3}, k-\frac{1}{3}$$

$$(j,k;1,3) = j+\frac{1}{3}, k-\frac{2}{3}\ ,\ (j,k;2,3) = j-\frac{1}{3}, k+\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} &[S^{(1)+}_{r,1}q_m + S^{(1)+}_{r,2}q^+_{m\zeta} + S^{(1)+}_{r,3}q^+_{m\eta}]^{n+\frac{1}{2}}_{(j,k)} \\ &= [S^{(1)-}_{r,1}q_m + S^{(1)-}_{r,2}q^+_{m\zeta} + S^{(1)-}_{r,3}q^+_{m\eta}]^{n}_{(j,k;1,r)} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} S^{(1)\pm}_{11} &= I - (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k} - (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(1)\pm}_{12} &= \pm(S^{(1)}_{11})(S^{(1)}_{21}) \\ S^{(1)\pm}_{13} &= \pm(S^{(1)}_{11})(S^{(1)}_{31}) \\ S^{(1)\pm}_{21} &= I + (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(1)\pm}_{22} &= \mp(S^{(1)}_{21})(2I - (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k}) \\ S^{(1)\pm}_{23} &= \pm(S^{(1)}_{21})(S^{(1)}_{31}) \\ S^{(1)\pm}_{31} &= I + (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(1)\pm}_{32} &= \pm(S^{(1)}_{31})(S^{(1)}_{21}) \\ S^{(1)\pm}_{33} &= \mp(S^{(1)}_{31})(2I - (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k}) \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &[S^{(2)+}_{r,1}q_m + S^{(2)+}_{r,2}q^+_{m\zeta} + S^{(2)+}_{r,3}q^+_{m\eta}]^{n+1}_{(j,k)} \\ &= [S^{(2)-}_{r,1}q_m + S^{(2)-}_{r,2}q^+_{m\zeta} + S^{(2)-}_{r,3}q^+_{m\eta}]^{n+\frac{1}{2}}_{(j,k;2,r)} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} S^{(2)\pm}_{11} &= I + (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k} + (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(2)\pm}_{12} &= \mp(S^{(2)}_{11})(S^{(2)}_{21}) \\ S^{(2)\pm}_{13} &= \mp(S^{(2)}_{11})(S^{(2)}_{31}) \\ S^{(2)\pm}_{21} &= I - (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(2)\pm}_{22} &= \pm(S^{(2)}_{21})(2I + (f^{\zeta+}_{m,l})^n_{j,k}) \\ S^{(2)\pm}_{23} &= \mp(S^{(2)}_{21})(S^{(2)}_{31}) \\ S^{(2)\pm}_{31} &= I - (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k} \\ S^{(2)\pm}_{32} &= \mp(S^{(2)}_{31})(S^{(2)}_{21}) \\ S^{(2)\pm}_{33} &= \pm(S^{(2)}_{31})(2I + (f^{\eta+}_{m,l})^n_{j,k}) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

(16)、(17) と (18)、(19) を用いることで (20) に示す関係が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} (q_m)^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3}\Big[S^{(1)-}_{r1}q_m + S^{(1)-}_{r2}q^+_{m\zeta} \\ &\qquad\qquad + S^{(1)-}_{r3}q^+_{m\eta}\Big]^n_{(j,k;1,r)} \\ (q_m)^{n+1}_{j,k} &= \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3}\Big[S^{(2)-}_{r1}q_m + S^{(2)-}_{r2}q^+_{m\zeta} \\ &\qquad\qquad + S^{(2)-}_{r3}q^+_{m\eta}\Big]^{n+\frac{1}{2}}_{(j,k;2,r)} \end{aligned}\right. \tag{21}$$

一方上面は現時間段階における SE の部分集合であるので、この面を通る流束を求める事が出来る。さらに上面の外向きベクトルは空間成分を持たないため全流束 $\vec{h}$ は上面全体にわたる積分領域における $q_m(\eta,\zeta,t;j,k,n)$ の面積分であるので、$(q_m)^n_{j,k}$ のみの関数である。このことから以下の式が得られる。

$$(q^\alpha_m)^{n+\frac{1}{2}}_{(j,k;1,r)} = [q_m + \frac{\Delta t}{2}q_{mt}]^n_{(j,k;1,r)} \tag{22}$$

$$(q^\alpha_m)^{n+1}_{(j,k;2,r)} = [q_m + \frac{\Delta t}{2}q_{mt}]^{n+\frac{1}{2}}_{(j,k;2,r)} \tag{23}$$

次の様な重み関数を導入することによって各時間段階における $q^+_{m\zeta}$、$q^+_{m\eta}$ を同じ時間段階における q_m によって評価することが出来る。

$$q^+_{m\zeta} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & if\ \ \theta_1=\theta_2=\theta_3=0 \\ otherwise & \\ \multicolumn{2}{l}{\dfrac{(\theta_2\theta_3)^\alpha q^{(1)+}_\zeta + (\theta_3\theta_1)^\alpha q^{(2)+}_\zeta + (\theta_1\theta_2)^\alpha q^{(3)+}_\zeta}{(\theta_1\theta_2)^\alpha + (\theta_2\theta_3)^\alpha + (\theta_3\theta_1)^\alpha}} \end{array}\right. \tag{24}$$

$$q^+_{m\eta} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & if\ \ \theta_1=\theta_2=\theta_3=0 \\ otherwise & \\ \multicolumn{2}{l}{\dfrac{(\theta_2\theta_3)^\alpha q^{(1)+}_\eta + (\theta_3\theta_1)^\alpha q^{(2)+}_\eta + (\theta_1\theta_2)^\alpha q^{(3)+}_\eta}{(\theta_1\theta_2)^\alpha + (\theta_2\theta_3)^\alpha + (\theta_3\theta_1)^\alpha}} \end{array}\right. \tag{25}$$

以下に重み関数に用いているそれぞれの関数を示す。これらは (21)、(22) と同じの時間段階における物理量に

よって評価することができる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\vec{x_1} &= (q_m^{\alpha})^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{3},k+\frac{1}{3}} - q^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} \\
\vec{y_1} &= (q_m^{\alpha})^{n+1}_{j-\frac{1}{3},k-\frac{1}{3}} - q^{n+1}_{j,k} \\
\vec{x_2} &= (q_m^{\alpha})^{n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{2}{3},k+\frac{1}{3}} - q^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} \\
\vec{y_2} &= (q_m^{\alpha})^{n+1}_{j+\frac{2}{3},k-\frac{1}{3}} - q^{n+1}_{j,k} \\
\vec{x_3} &= (q_m^{\alpha})^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{3},k-\frac{2}{3}} - q^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} \\
\vec{y_3} &= (q_m^{\alpha})^{n+1}_{j-\frac{1}{3},k+\frac{2}{3}} - q^{n+1}_{j,k}
\end{aligned}
\right. \tag{26}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
(q^{(1)}_{m\zeta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= -\frac{2\vec{x_2}+\vec{x_3}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(1)}_{m\zeta})^{n+1}_{j,k} &= \tfrac{2\vec{y_2}+\vec{y_3}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(2)}_{m\zeta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= \frac{2\vec{x_1}+\vec{x_3}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(2)}_{m\zeta})^{n+1}_{j,k} &= -\tfrac{2\vec{y_1}+\vec{y_3}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(3)}_{m\zeta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= -\frac{\vec{x_2}-\vec{x_1}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(3)}_{m\zeta})^{n+1}_{j,k} &= \tfrac{\vec{y_2}-\vec{y_1}}{\Delta\zeta} \\
(q^{(1)}_{m\eta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= -\frac{\vec{x_2}+2\vec{x_3}}{\Delta\eta} \\
(q^{(1)}_{m\eta})^{n+1}_{j,k} &= \tfrac{\vec{y_2}+2\vec{y_3}}{\Delta\eta} \\
(q^{(2)}_{m\eta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= \frac{\vec{x_1}-\vec{x_3}}{\Delta\eta} \\
(q^{(2)}_{m\eta})^{n+1}_{j,k} &= -\tfrac{\vec{y_1}-\vec{y_3}}{\Delta\eta} \\
(q^{(3)}_{m\eta})^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} &= \frac{2\vec{x_1}+\vec{x_2}}{\Delta\eta} \\
(q^{(3)}_{m\eta})^{n+1}_{j,k} &= \tfrac{2\vec{y_1}+\vec{y_2}}{\Delta\eta}
\end{aligned}
\right. \tag{27}
$$

ここで $q_{m\zeta}$、$q_{m\eta}$ はそれぞれ $\left(\frac{\partial q_m}{\partial \zeta}\right)_\eta$、$\left(\frac{\partial q_m}{\partial \eta}\right)_\zeta$ を示している。また $q_{mx} = \left(\frac{\partial q_m}{\partial x}\right)_y$、$q_{my} = \left(\frac{\partial q_m}{\partial y}\right)_x$ とすると、それぞれ次の様に与えられる。

$$q^{(l)}_{mx} = q^{(l)}_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + q^{(l)}_{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{28}$$

$$q^{(l)}_{my} = q^{(l)}_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + q^{(l)}_{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{29}$$

また (8) から次の関係が成り立つ。

$$q^{(l)+}_{\zeta} = \frac{\Delta\zeta}{6}q^{(l)}_{\zeta}\ ,\ q^{(l)+}_{\eta} = \frac{\Delta\eta}{6}q^{(l)}_{\eta} \tag{30}$$

以上のことから (20)、(23)、(24) を用いることで各時間段階における q_m を陽的に評価することが出来る。

4. 正方領域内における爆縮問題への適用

第 3 章において説明した CE/SE 法を、正方領域内において正 3 角形、正方形、正 5 角形、正 6 角形の初期形状を持つ爆縮問題に適用して計算を行う。また同様の現象を FDS 法でも計算を行い、衝撃波の伝播、干渉の挙動の捉え方について比較することで CE/SE 法の特徴について調べる。

4.1 初期条件及び、計算条件

いま、x、y 各軸方向にそれぞれ無次元長さ 4 の壁で囲まれた正方形の計算領域を考える。

正方領域の重心 $(2,2)$ の位置に重心を持ち、ひとつの頂点が $(2, 2+0.8\sqrt{3})$ にあり、半径 $=0.8\sqrt{3}$ の円周上にすべての頂点を持つ正 3 角形、正方形、正 5 角形、正 6 角形を考える。それらの多角形の各辺を隔膜として外部と内部に初期条件として圧力比 10、密度比 10 を与え、無次元時間 0 においてその隔膜を取り払うものとする。ただし、比熱比が 1.4 である理想気体を対象としている。

CE/SE 法及び、FDS 法によって計算を行った結果を以下に示す。CE/SE 法においては格子点数 241×241, 時間刻み幅 0.00420。FDS 法においては格子点数 240×240、時間刻み幅 0.00315 で計算を行った。

4.2 境界条件

図 4 に示す A の様な垂直な壁、B の様な水平な壁に対しての境界条件を示す。

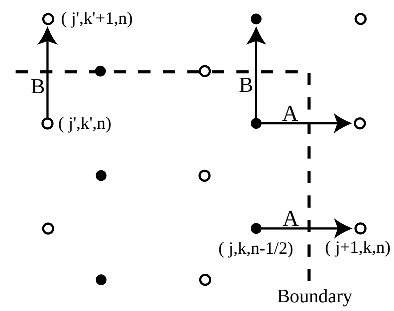

Fig. 4: Boundary condition

垂直な壁の境界条件は以下の様になる。ただし (q_m^{α}) は (22),(23) に示すものと同じである。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(q_m)^n_{j+1,k} = (q_m^{\alpha})^n_{j,k}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_2)^n_{j+1,k} = -(q_2^{\alpha})^n_{j,k} \\
&(q_{mx})^n_{j+1,k} = -(q_{mx})^{n-\frac{1}{2}}_{j,k}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_{my})^n_{j+1,k} = (q_{my})^{n-\frac{1}{2}}_{j,k}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_{2x})^n_{j+1,k} = (q_{2x})^{n-\frac{1}{2}}_{j,k} \\
&(q_{2y})^n_{j+1,k} = -(q_{2y})^{n-\frac{1}{2}}_{j,k}
\end{aligned}
\right. \tag{31}
$$

水平な壁に対しての境界条件は以下の様に表せる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(q_m)^n_{j',k'+1} = (q_m)^n_{j',k'}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_2)^n_{j',k'+1} = -(q_2)^n_{j',k'} \\
&(q_{mx})^n_{j',k'+1} = -(q_{mx})^n_{j',k'}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_{my})^n_{j',k'+1} = (q_{my})^n_{j',k'}\ ,\ m=1,3,4 \\
&(q_{2x})^n_{j',k'+1} = (q_{2x})^n_{j',k'} \\
&(q_{2y})^n_{j',k'+1} = -(q_{2y})^n_{j',k'}
\end{aligned}
\right. \tag{32}
$$

4.3 計算結果

図 5 の左側は CE/SE 法による正 3 角形の初期形状における無次元時間 0.428 の計算結果、右側は参考文献 (6) における計算結果である。ともに等密度線図を示している。。参考文献 (6) における計算結果とよく一致していることから、本計算コードが正しいことがわかる。

正方形、正 5 角形、正 6 角形の各初期形状における CE/SE 法及び、FDS 法による計算結果を図 6 から図 11 に示す。各図とも左側が CE/SE 法、右側が FDS 法による結果を示している。図 7 は等圧力線図、図 6、8、10 は等密度線図、図 9 は正 5 角形の初期形状、図 11 は正 6 角形の初期形状の場合の $y=2$、$x=2$ での無次元時間 2.5704 における密度を示したもので青は CE/SE 法、緑は FDS 法を表している。

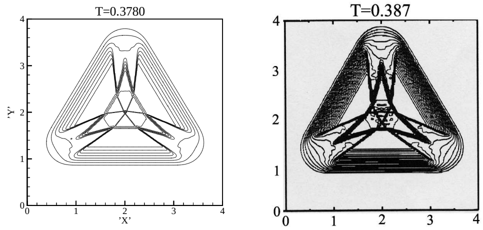

Fig. 5: Density contour for triangular implosion

圧力に関しては双方の計算結果ともほとんど差異が無いことが見て取れるが、密度においては衝撃波同士の内部干渉についての捉え方に差があることがわかる。

図 9 の x 方向の中心における差は、y 軸方向の衝撃波の内部干渉の捉え方の違いに起因することがわかる。また図 11 の x 軸方向においてはほぼ一致しているにもかかわらず、y 方向で違いが出てきていることが見て取れる。

図 12、図 14 は計算領域左側に格子点数 721×721 で CE/SE 法によって計算を行った等密度線図を示し、右側に図 12 では格子点数 241×241 の CE/SE 法による結果、図 14 では格子点数 240×240 の FDS 法による結果を示している。また図 13、図 15 とも緑が格子点数 721×721 の CE/SE 法による $y = 2$、$x = 2$ での密度を示しており、図 13 の青は格子点数 241×241 の CE/SE 法、図 15 では FDS 法の結果である。無次元時間は 2.5704 における状態である。これらの結果から衝撃波の内部構造について CE/SE 法の方が若干精度的に劣っているが、それ以外の点に付いては FDS 法とほぼ同精度で現象を捉えていることがわかる。

また、無次元時間 4.223 まで計算した際の CPUTIME は同クーラン数において計算した場合 CE/SE 法は 395.30、FDS 法は 310.69 であり、1 格子点当り 1 ステップに CE/SE 法は 0.00681、FDS 法は 0.00539 であることから CE/SE 法の方が 1 格子点当りの計算負荷が多いことがわかった。一方 CE/SE 法で最大のクーラン数 (約 0.9) において計算した場合、同無次元時間まで 288.67 であり、CE/SE 法が FDS 法の 92.9% の計算時間であり若干計算時間が短いことがわかった。

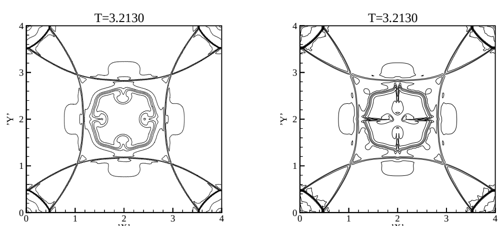

Fig. 6: Density contours for square implosion

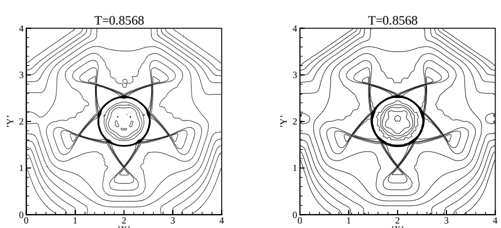

Fig. 7: Pressure contours for pentagonal implosion

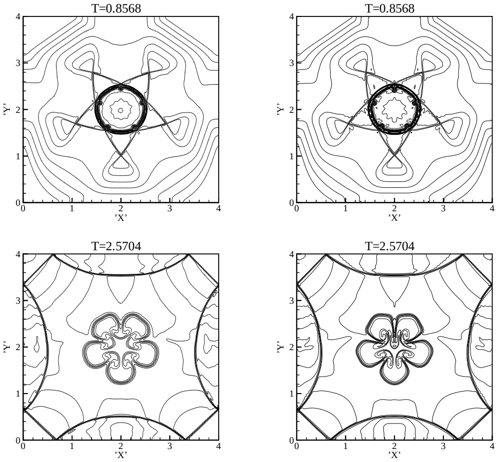

Fig. 8: Density contours for pentagonal implosion

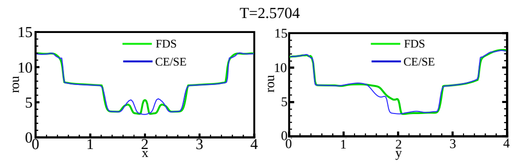

Fig. 9: Density distribution for pentagonal implosion

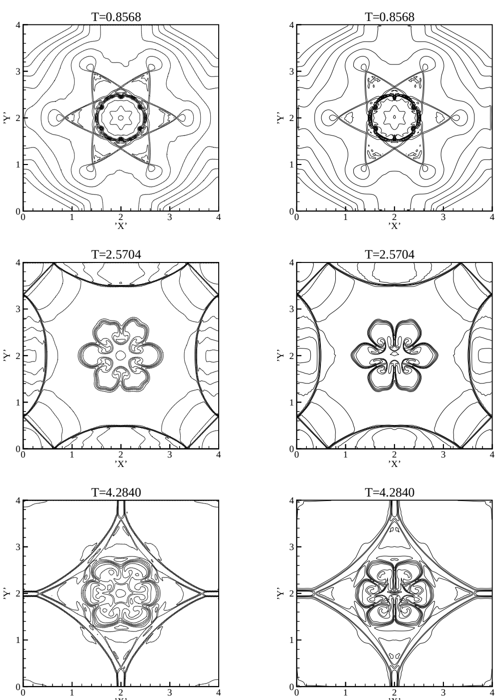

Fig. 10: Density contours for hexagonal implosion

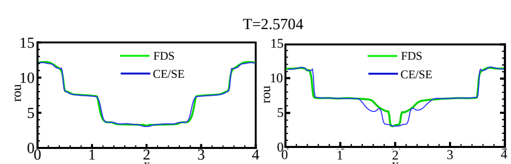

Fig. 11: Density distribution for hexagonal implosion

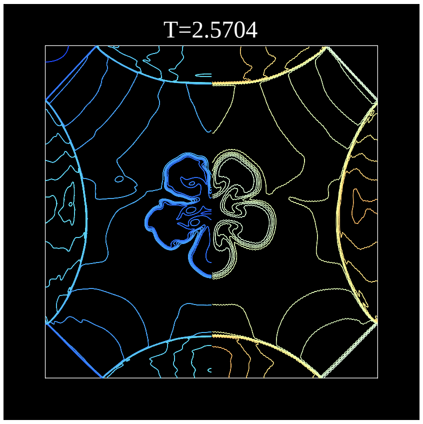

Fig. 12: Density contour for pentagonal implosion

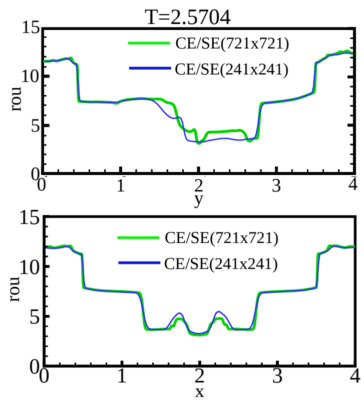

Fig. 13: Density distribution for pentagon implosion

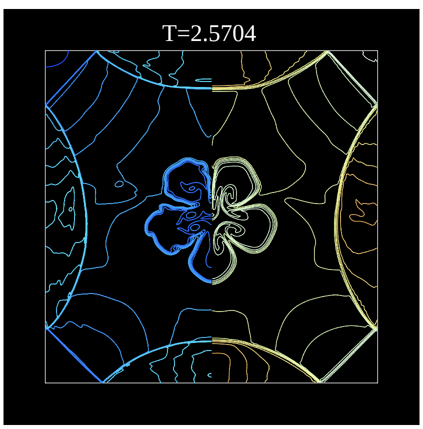

Fig. 14: Density contour for pentagonal implosion

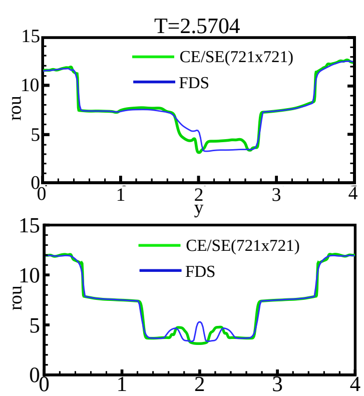

Fig. 15: Density distribution for pentagon implosion

5. 結論

CE/SE 法、FDS 法を正方領域内において正 3 角形, 正方形、正 5 角形、正 6 角形の初期形状を持つ爆縮問題に適用し、衝撃波の捉え方、計算時間について比較を行った。CESE 法は格子点数 241 × 241、時間刻み幅 0.0042、FDS 法は格子点数 240 × 240、時間刻み幅 0.00315 で計算した。

CE/SE 法は衝撃波の内部干渉の捉え方については FDS 法と比べて若干精度が劣るが、それ以外の点についてはほぼ同じ精度で衝撃波を捉えられることがわかった。

また、無次元時間 4.223 まで計算した際の CPUTIME は同クーラン数において計算した場合 CE/SE 法は 395.30、FDS 法は 310.69 であり、CE/SE 法の方が 1 格子点当りの計算負荷が大きいことがわかった。一方 CE/SE 法で最大のクーラン数 (約 0.9) において計算した場合、同無次元時間まで 288.67 であり、CE/SE 法が FDS 法の 92.9% の計算時間であり若干計算時間が短いことがわかった。

これらの事から、CE/SE 法が計算時間の面において有望であるスキームである事がわかった。

参考文献

1. A.Jameson , W.Schmidt , and E.Turkel , Numerical Simulation of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes , AIAA Paper,(1981),pp. 81-1259
2. H.C.Yee , R.F.Warming , and A.Harten , Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations , AIAA Paper,(1983),pp. 83-1902.
3. S.C. Chang , X.Y. Wang, and C.Y. Chow , "New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems", NASA TM106758, 12(1994).
4. S.C. Chang , X.Y. Wang, and C.Y. Chow , "The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method : A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws", J.Comput.Phys 156,(1999),pp. 89-136.
5. S.C. Chang , X.Y. Wang , and C.Y. Chow , The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method-A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws. .The Two-Dimensional Time Marching Schemes, NASA TM208843,12(1998).
6. X.Y. Wang , C.Y. Chow , and S.C. Chang, The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method-A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws. .Numerical Simulation of Shock Waves and Contact Discontinuities, NASA TM208844,12(1998).