立方化球座標系浅水波方程式への高次精度解法の適用

Application of Higher Order Solution to the Shallow Water Equation on Cubed Sphere Coordinate.

○信岡　政樹, 京工繊大　大学院,〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所街道町, E-mail: nobuoka@fe.mech.kit.ac.jp
里深　信行, ,京工繊大　工芸学部,〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所街道町, E-mail: satofuka@ipc.kit.ac.jp
Masaki NOBUOKA, Dept. of Mech. And Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. And Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Recently, there are many attempts for the numerical simulations to predict atmospheric and ocean currents on the earth. In such cases, if we employ spherical coordinate, it is difficult to treat many problems accompanied with the specificities such as pole problem. To conquer such problems, we employ Cubed Sphere as a gridding technique, weighted ENO scheme for spatial discretization and 4th order Runge-Kutta Method for time integration. In this paper, we analyze the standard test set of the shallow water problem on the sphere proposed by Williamson.

１．概要

現在の地球などを想定した球面上の数値計算を行なう場合、球面調和関数を用いた擬スペクトル法が主として用いられている。この球面調和関数を用いた方法では、計算精度は高いものが得られる。しかし、全球気象モデルの計算環境が高解像度化、超並列計算機の使用という流れにあることを考慮すると、従来の擬スペクトル法ではルジャンドル変換の非効率性、緯度経度球座標系計算格子の極近傍の格子密集に伴う計算条件の厳しい制限が重大な問題となる。これらの問題に対し本研究では、計算格子に立方化球座標系計算格子を用い、空間の離散化に差分法として修正微分求積法と Weighted ENO 法（WENO 法）を、時間積分法に４段階ルンゲ・クッタ法を用いる。この方法のテストとして Williamson 等により提案された浅水波方程式の検定問題を適用し結果を示す。

２．立方化球座標系格子

立方化球座標系とは、球の中に内接する立方体を入れ球面に中心射影したものである。これにより Fig.1 のように球面は合同な 6 面に分割される。格子幅の粗密の割合は最大でも 0.8 弱という比較的均一なもので、このことは緯度経度球座標系で問題となる極近傍で格子点が密集するということを無くし、数値計算上有利となる。また 6 面とも極が無く特異点問題が存在しない。6 分割された各領域はそれぞれ独立しており、領域ごとに計算を行なうが、領域分割法と同様に互いの境界の物理量を内挿により受け渡しする必要がある。並列計算において、数値計算で用いる領域の計算式が 6 面とも同一に定義できるため計算効率が高くなる。

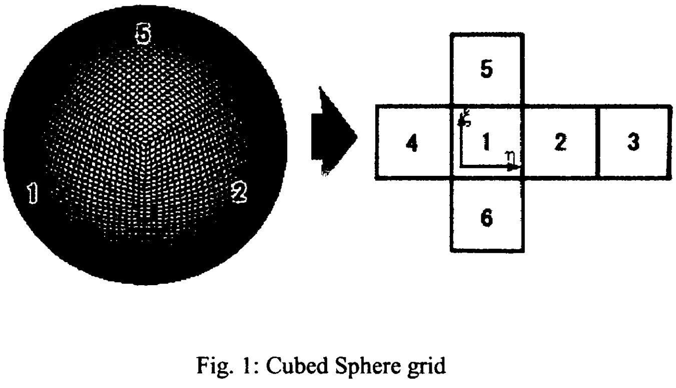

Fig. 1: Cubed Sphere grid

３．数値計算法

数値計算法として線の方法を採用し、空間微分項の離散化と時間積分法とを別個に取り扱う。空間の離散化に対しては修正微分求積法(MDQ 法)に空間精度と同階の人工粘性を付加した方法と WENO 法を用いる。WENO 法とは、移流問題に対して MDQ 法のような非物理的な数値振動を抑制するために人工粘性を付加するという手続き無しに自動的に数値振動を抑えることができ、高次精度へも比較的容易に展開できる高解像度法である。時間積分法には４段階ルンゲ・クッタ法を用いる。

４．結果

球面上の浅水波方程式に対するテストに Williamson のテストケースを用いた。Fig.2 はテストケース１の計算結果である。8 次精度 MDQ 法による計算結果に比べ９次精度 WENO 法によるものでは、移流方向後方の数値振動を抑制できることが解った。球面調和関数を用いた計算結果と 9 次精度 WENO 法を用いたものとを比較して、テストケース１では計算誤差において若干誤差が大きくあらわれたが、完全浅水波方程式を用いたその他の検定問題においては、ほぼ同等の結果が得られた。また計算時間について、計算格子点数が数万点を超えるあたりから球面調和関数を用いたものよりも速くなるという結果が得られた。

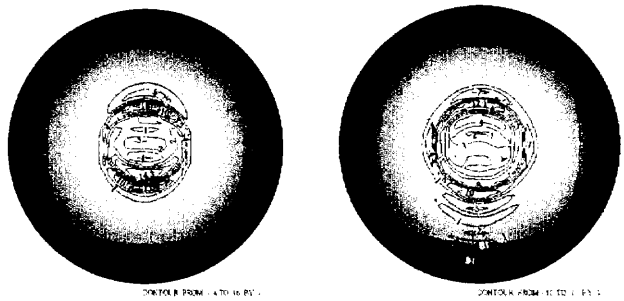

Fig. 2: Height field error after one rotation for Williamson Test Case 1, 9th order WENO (left), 8th order MDQ (right).

参考文献

1) C.Ronchi,R.Iacono,and P.S.Paolucci.,J.Comput.Phys,124 (1996) 93-114.
2) D.L.Williamson,J.B.Drake,J.J.Hack,R.Jakob,and P.N.Swarztraube.,J.Comput.Phys.102 (1992) 211-224.
3) D.S.Balsara,C.W.Shu., J.Comput.Phys.160 (2000) 405-452.