

重合格子法を用いた球面座標系での流体計算

Fluid simulation on Spherical coordinate system by using Overset grid

吉田 浩, 東京工業大学院, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:00m19338@nr.titech.ac.jp

青木 尊之, 東京工業大学 学術国際情報センター, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:taoki@nr.titech.ac.jp

Hiroshi Yoshida, Univ.of Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8550 Japan

Takayuki Aoki, GSIC.Univ.of Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku,Tokyo 152-8550 Japan

We develop a numerical scheme of fluid dynamics on spherical coordinate system suitable for meteorological and ocean simulation of the global model. In order to keep higher-order accuracy, Interpolated Differential Operator (IDO) scheme with Hermite interpolation is used. Introduction of the overset grid method avoids the problems appearing at the pole, where the singular point exists and the mesh concentrates. The overset grid requires communications with high accurate interpolation at the boundary between grid systems. We estimate the case I, II and V of Williamson's benchmark tests, and obtain quite good results.

1. はじめに

従来、全球モデルの気象・海洋シミュレーションでは座標系として球面座標系が使われてきた。しかし、球面座標系では解像度が上がるにつれ北極、および南極付近の格子が過剰に集中してしまう。極近傍に格子が集中することは、CFL 条件による制限からタイムステップを非常に小さくしなければならないという困難を生じる。その結果、無駄な計算が増え、計算時間が大幅に増大する。また、一般に球面座標系の支配方程式中には $1/\cos\theta$ (θ は緯度) の項が含まれるが、極点 $\theta = \pi/2, -\pi/2$ のとき無限大になるので計算が行えない。

計算スキームでは差分法や球面調和関数を用いた擬スペクトル法が広く使われてきた。しかし、差分法は高速に計算できるが一般に精度が低く、長時間スケールなグローバルシミュレーションには向かない。また、球面調和関数を用いた擬スペクトル法は精度が高いが計算時間が非常にかかる。

そこで、本研究では従来とは異なる計算スキーム、座標系を用いて、全球モデルでの新しい計算手法の開発を行う。計算スキームにはエルミート補間を用いた「局所微分オペレータ法 (IDO 法)」⁽¹⁻⁴⁾ を採用する。IDO 法では CIP 法⁽⁵⁻⁶⁾ と同様に、物理量とその空間 1 階微係数を従属変数として持つ。補関関数の特徴を活かして、移流項、非移流項の両者とも高精度で近似ができる。新たな格子モデルの構築には、元の球面座標系とそれに直交する補助的な球面座標系を用意し、元の座標系の極付近の格子を補助座標系の赤道付近の格子で置き換える「重合格子法」を用いる。(Fig.1) 座標系の相互参照には物理量とその 1 階空間微係数を従属変数として用いた CIP (Cubic Interpolated Propagation) 法を利用して 3 次精度補間で行う。

そして、これらを用いて Williamson らの提唱する球面上浅水波方程式のテストケース⁽⁷⁻⁸⁾ 1,2,5 を解きその有用性を確かめる。

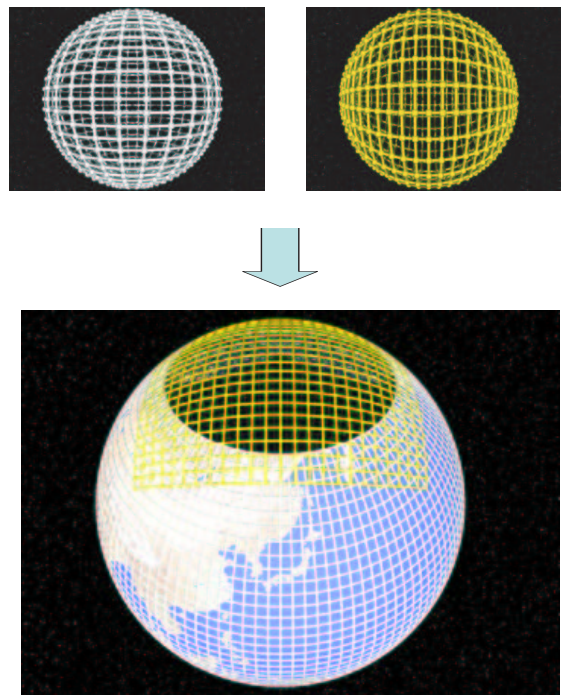


Fig. 1: Schematic view of the overset grid. The grid-points of the neighborhood of a pole in the original coordinate system are substituted with the equatorial gridpoints in the auxiliary coordinate system.

2. 局所微分補間オペレータ法 (IDO)

2.1 補関関数

IDO 法では各グリッド点毎に物理量とその空間 1 階微係数を定義し、それらの値を用いて局所的にエルミート補間を形成する。ただし、移流項、非移流項で補関関数の形成方法が異なる。計算の際に必要な高次空間微係数は補関関数を微分することで求める。

移流相に関してはグリッド点における移流速度から風上方向を検出し、風上方向に対して補関関数を張る。こ

れを風上補間と呼ぶ。補間関数は以下ようになる。

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + f_{x,i}x + f_i \quad (1)$$

移流速度 u が正のとき $i-1$ 番目から i 番目のグリッドにかけて補間関数を張る。ここで i は格子点の番号、 $f_i, f_{x,i}$ はそれぞれ格子点 i における物理量と空間 1 階微係数を表す。高次空間微係数は $f_{xxx} = F_{xxx}(0) = 6a$ 、 $f_{xx} = F_{xx}(0) = 2b$ 、と補間関数を微分することで求める。係数 a, b は適合条件 $F(-\Delta x) = f_{i-1}$ 、 $F_x(-\Delta x) = f_{x,i-1}$ から求める。格子点 i における高次空間微係数は

$$f_{xxx,i} = 6 \left(-2 \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x^3} + \frac{f_{x,i} + f_{x,i-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (2)$$

$$f_{xx,i} = 2 \left(-3 \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{2f_{x,i} + f_{x,i-1}}{\Delta x} \right) \quad (3)$$

となる。移流速度が負のときは i 番目から $i+1$ 番目のグリッドにかけて補間関数を張る。適合条件は $F(\Delta x) = f_{i+1}$ 、 $F_x(\Delta x) = f_{x,i+1}$ となり、高次空間微係数は

$$f_{xxx,i} = 6 \left(2 \frac{f_i - f_{i+1}}{\Delta x^3} + \frac{f_{x,i} + f_{x,i+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (4)$$

$$f_{xx,i} = 2 \left(-3 \frac{f_i - f_{i+1}}{\Delta x^2} - \frac{2f_{x,i} + f_{x,i+1}}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

となる。

非移流項に関してはグリッド点を中心として 5 次多項式で補間関数を張る。これを 5 次中心補間と呼ぶ。補間関数は以下ようになる。

$$F(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + f_{x,i}x + f_i \quad (6)$$

5 次中心補間では $i-1$ 番目から $i+1$ 番目のグリッドにかけて補間関数を張る。適合条件は $F(-\Delta x) = f_{i-1}$ 、 $F_x(-\Delta x) = f_{x,i-1}$ 、 $F(\Delta x) = f_{i+1}$ 、 $F_x(\Delta x) = f_{x,i+1}$ となる。格子点 i において $f_{xxxxx} = F_{xxxxx}(0) = 120a$ 、 $f_{xxxx} = F_{xxxx}(0) = 24b$ 、 $f_{xxx} = F_{xxx}(0) = 6c$ 、 $f_{xx} = F_{xx}(0) = 2d$ から高次空間微係数は

$$f_{xxxxx,i} = 120 \left(-\frac{3(f_{i+1} - f_{i-1})}{4\Delta x^5} + \frac{(f_{x,i+1} + 4f_{x,i} + f_{x,i-1})}{4\Delta x^4} \right) \quad (7)$$

$$f_{xxxx,i} = 24 \left(-\frac{3(f_{i+1} - f_i + f_{i-1})}{2\Delta x^4} + \frac{(f_{x,i+1} - f_{x,i-1})}{4\Delta x^3} \right) \quad (8)$$

$$f_{xxx,i} = 6 \left(\frac{5(f_{i+1} - f_{i-1})}{4\Delta x^3} - \frac{(f_{x,i+1} + 8f_{x,i} + f_{x,i-1})}{4\Delta x^2} \right) \quad (9)$$

$$f_{xx,i} = 2 \left(\frac{(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{(f_{x,i+1} - f_{x,i-1})}{4\Delta x} \right) \quad (10)$$

となる。

偏微分方程式に含まれる微分項は移流項と非移流項に分かれるのでそれぞれの項に対し上で述べた補間を適用する。

2.2 時間前進

IDO 法では物理量とその空間 1 階微分を従属変数として持っているので、時間前進もこれらについて行う必要がある。時間前進スキームは時間に関するテーラー展開が用いられる。

$$f^{n+1} = f^n + f_t^n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} f_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} f_{ttt}^n + \frac{\Delta t^4}{24} f_{tttt}^n + \frac{\Delta t^5}{120} f_{ttttt}^n \quad (11)$$

$$f_x^{n+1} = f_x^n + f_{tx}^n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} f_{ttx}^n + \frac{\Delta t^3}{6} f_{tttx}^n + \frac{\Delta t^4}{24} f_{ttttx}^n + \frac{\Delta t^5}{120} f_{tttttx}^n \quad (12)$$

ここで上付きの添え字 $n, n+1$ はそれぞれ時刻 $t, t+\Delta t$ の値、 f_t は時間に対する微係数を表している。 f^n, f_x^n の時間微分は支配方程式を用いて、すべて空間微分に置き換える。例えば定常速度場における 1 次元の移流方程式 $f_t + uf_x = 0$ の場合、 $f_{tt} = u^2 f_{xx}$ 、 $f_{ttx} = u^2 f_{xxx}$ 、 $f_{ttt} = u^3 f_{xxx}$ 、 \dots となり時間微分はすべて空間微分で置き換わる。

2.3 2次元の場合

球面座標系は 2 次元座標系なので IDO 法も 2 次元化する必要がある。2 次元問題として以下のような方程式を考える。

$$f_t = f_x + f_y \quad (13)$$

1 次元の場合と同様に与えられた方程式を空間微分することで不足分の方程式を生成すると以下ようになる。

$$f_{tx} = f_{xx} + f_{xy} \quad (14)$$

$$f_{ty} = f_{xy} + f_{yy} \quad (15)$$

f_{xx}, f_{yy} は 1 次元のケースと同様に求めることができるが f_{xy} は補間関数が作れないため求めることができない。そこで、 f_{xy} もまた従属変数として定義する。従属変数を増やしたことで $f_{txy} = f_{xxy} + f_{xyy}$ を解く必要がある。

f_{xx} が f の x 方向の補間関数から求められるのと同様に、 f_{xxy}, f_{xyy} はそれぞれ f_y の x 方向、 f_x の y 方向の補間関数から求めることができる。すなわち、1 次元のエルミート補間関数を f の x および y 方向、 f_x の y 方向、 f_y の x 方向と 4 回適用することで必要な微係数を得ることができる。また、 f_{xxyy} のような微係数は計算精度にほとんど影響しないので 0 とみなして計算する。

3. 重合格子法

極付近でおこる問題を回避するため重合格子法を用いる。元の球面座標系 (メイングリッド) の他にもう 1 つ、緯度方向に $\pi/2$ だけ回転した球面座標系 (サブグリッド) を用意し、メイングリッドの極付近をサブグリッドの赤道付近で置き換える。(Fig.1)

サブグリッドはメイングリッドを回転しただけで形状は変化しないので解く式の形はメイングリッドのものと同じである。しかし、サブグリッドでの初期条件の与え方とそれぞれのグリッドでの境界の時間前進に関しては注意が必要である。

3.1 境界点の補間

メイングリッド、サブグリッドとも毎ステップごとに境界点での物理量、その空間 1 階微係数を求める必要がある。ここでは境界の時間前進を CIP-Type C⁽⁶⁾ の手法で補間して求める。Fig.2 はサブグリッドの境界点 () での物理量、その空間 1 階微係数をそれを囲むメイングリッドの物理量、その空間 1 階微係数 () を用いて補間する例である。(i, j)、(i + 1, j) の間に 3 次のエル

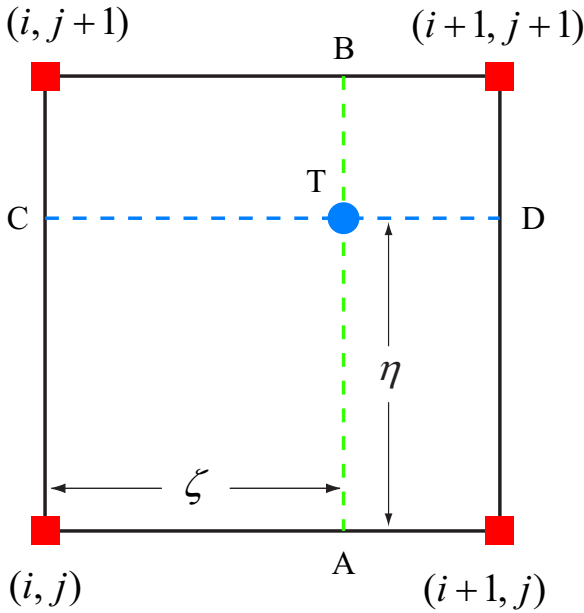


Fig. 2: Illustration of the boundary interpolation.

ミート補間関数 ($F(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + f_{\lambda(i,j)}\lambda + f_{(i,j)}$ 、 $F_{\theta}(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + f_{\lambda\theta(i,j)}\lambda + f_{\theta(i,j)}$) を形成する。適合条件より a, b を求める。得られた補間関数と補間関数の微分に $\lambda = \xi$ を代入することにより点 A での $f, f_{\lambda}, f_{\theta}, f_{\lambda\theta}$ を求める。(i, j+1)、(i+1, j+1) 間も同様にして、点 B での $f, f_{\lambda}, f_{\theta}, f_{\lambda\theta}$ を求める。さらに点 A、点 B 間に補間関数 ($F(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + f_{\theta} + f$ 、 $F_{\lambda}(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + f_{\lambda\theta} + f_{\lambda}$) を形成し、適合条件より a, b を求める。得られた補間関数またその微分に $\theta = \eta$ を代入することにより点 T での $f, f_{\lambda}, f_{\theta}, f_{\lambda\theta}$ が求まる。

メイングリッドの境界点での物理量、その空間 1 階微係数も同様の手順でサブグリッドの物理量、その空間 1 階微係数を用いて補間して求める。

以上の作業でにおける $f, f_{\lambda}, f_{\theta}, f_{\lambda\theta}$ が求まるが、これらはメイングリッドでの値のためサブグリッドでの値に変換する必要がある。

3.2 座標変換

一般に座標変換によって密度や温度などのスカラー量の値は変わらないが、微分演算子や速度などのベクトル量は値が変わってしまう。よって、サブグリッドでの初期条件や補間で求めた境界点での値がベクトル量の場合、座標変換を施す必要がある。サブグリッドの点における物理量またその空間 1 階微係数を $f', f_{\lambda'}, f_{\theta'}, f_{\lambda'\theta'}$ とすると chain rule を用いることで以下ようになる。

$$f' = f \quad (16)$$

$$f_{\lambda'} = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} f_{\lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda'} f_{\theta} \quad (17)$$

$$f_{\theta'} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} f_{\lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} f_{\theta} \quad (18)$$

$$f_{\lambda'\theta'} = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} f_{\lambda\lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda'} \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} f_{\theta\theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} f_{\lambda\theta} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} f_{\lambda\theta} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \lambda' \partial \theta'} f_{\lambda} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda' \partial \theta'} f_{\theta} \quad (19)$$

ここで、 (λ, θ) 、 (λ', θ') はそれぞれメイングリッド、サブグリッドでの経度、緯度を表す。両者の関係は以下ようになる。

$$\lambda' = \arctan \left[\frac{\cos \theta \sin \lambda}{\sin \theta} \right] \quad (20)$$

$$\theta' = -\arcsin [\cos \lambda \cos \theta] \quad (21)$$

$$\lambda = -\arctan \left[\frac{\cos \theta' \sin \lambda'}{\sin \theta'} \right] \quad (22)$$

$$\theta = \arcsin [\cos \lambda' \cos \theta'] \quad (23)$$

ところで、式 (19) では $f_{\lambda'\theta'}$ を求めるのに $f_{\lambda\lambda}, f_{\theta\theta}$ といった空間 2 階微分の値が必要となる。 $f_{\theta\theta}$ は Fig.2 の点 A、点 B 間の補間関数から、

$$f_{\theta\theta} = F_{\theta\theta}(\eta) = 6a\eta + 2b \quad (24)$$

と求め $f_{\lambda\lambda}$ は点 C、点 D 間の補間関数から、

$$f_{\lambda\lambda} = F_{\lambda\lambda}(\xi) = 6a\xi + 2b \quad (25)$$

と求める。

メイングリッド、サブグリッド上における移流速度を (u, v) 、 (u', v') とすると両者の関係は以下ようになる。

$$u' = u \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} + v \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} \quad (26)$$

$$v' = u \frac{\partial \theta}{\partial \lambda'} + v \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \quad (27)$$

IDO 法では $\frac{\partial u'}{\partial \lambda'}$ 、 $\frac{\partial u'}{\partial \theta'}$ 、 $\frac{\partial u'}{\partial \lambda'\theta'}$ 、 $\frac{\partial v'}{\partial \lambda'}$ 、 $\frac{\partial v'}{\partial \theta'}$ 、 $\frac{\partial v'}{\partial \lambda'\theta'}$ も求める必要がある。

サブグリッドの初期条件や境界点での値は式 (16)-(19)、(26)、(27) から求めることができる。

4. 数値実験

4.1 IDO 法での精度検証

最初に、座標系は通常球面座標系として IDO 法の精度を検証する。

離散化は球面座標系を直角座標系にマッピングすることで行う (Fig.3)。経度方向は周期境界、緯度方向は極を固定境界とし、極での値は時間的に変化しないものとする。

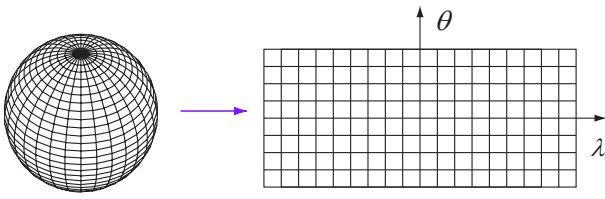


Fig. 3: Mapping of the spherical coordinate system into the cartesian coordinate system

検証問題として Williamson のテストケース 1、2、5 を解く。支配方程式は、

$$u_t + \frac{u}{a \cos \theta} u_\phi + \frac{v}{a} u_\theta - \left(f + \frac{u \tan \theta}{a} \right) v + \frac{g}{a \cos \theta} h_\phi = 0 \quad (28)$$

$$v_t + \frac{u}{a \cos \theta} v_\phi + \frac{v}{a} v_\theta + \left(f + \frac{u \tan \theta}{a} \right) u + \frac{g}{a} h_\theta = 0 \quad (29)$$

$$h_t + \frac{u}{a \cos \theta} h_\phi + \frac{v}{a} h_\theta + \frac{h}{a \cos \theta} (u_\phi + (v \cos \theta)_\theta) = 0 \quad (30)$$

で与えられる。ここで、 h は自由表面の高さ、 h^* は流体の深さを表す。もし、 h_s を山の高さとする $h = h^* + h_s$ である。 u, v はそれぞれ経度 (λ)、緯度 (θ) 方向の速度、 $a (= 6.37122 \times 10^6 [m])$ は地球の半径、 $g (= 9.80616 [m/s^2])$ は重力加速度、 f はコリオリパラメータである。

4.1.1 テストケース 1 テストケース 1 は移流の問題である。12 日で地球上を一周する速度場を与え、cosine 型のプロファイルをどれほど維持できるかを検証する問題である。定常速度場を

$$u = u_0 (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \lambda \sin \alpha) \quad (31)$$

$$v = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha \quad (32)$$

で与える。ここで α は回転軸と座標軸の角度を表す。式 (30) に代入すると

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = -\frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial h^*}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \quad (33)$$

と簡単な移流方程式になる。初期プロファイルは

$$h = \begin{cases} \frac{h_0}{2} (1 + \cos(\frac{\pi r}{R})) & \text{if } r < R \\ 0 & \text{if } r \geq R \end{cases} \quad (34)$$

$$r = a \arccos [\sin \theta_c \sin \theta + \cos \theta_c \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_c)] \quad (35)$$

で与える。ここで各パラメータは $\lambda_c = 3\pi/2$ 、 $\theta_c = 0$ 、 $h_0 = 1000$ 、 $R = a/3$ 、 $2\pi a/(12 \text{days})$ 、 $\alpha = \pi/6$ である。

また誤差の評価は以下の式で行う。

$$E(h^*) = \frac{I[|h^* - h_T^*|]}{I[|h_T^*|]} \quad (36)$$

ただし $I(h^*) = \frac{1}{4\pi} \sum \sum h \cos \theta d\theta d\lambda$ である。ここで h^* は数値解、 h_T^* は解析解を表す。

Fig.4 は 12 日後におけるプロファイル (格子点数 180×135) の $\theta = 0$ での断面図を 1 次精度風上差分 (FDM1) 3 次精度風上差分 (FDM3) IDO 法で比較した結果である。FDM と比較して、IDO は高精度でプロファイルを維持できていることがわかる。

また、Fig.5 は各スキームの空間精度の比較した結果である。解像度を高くすることで、FDM ではそれほど精度が上がらないのに対し IDO 法では精度がよくなっている。

4.1.2 テストケース 2 テストケース 2 はケース 1 で用いた定常流のテストである。時間発展しないような初期プロファイルを与え、どの程度の誤差で定常解を保つことができるかを検証する問題である。このテストでは 3 つの式すべてを解く。ただし、山は存在しない ($h_s = 0$) ので $h = h^*$ となる。初期条件 (かつ解析解) は以下の式で与えられる。

$$u = u_0 (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \lambda \sin \alpha) \quad (37)$$

$$v = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha \quad (38)$$

$$h^* = h_0 - \frac{1}{g} \left(a\Omega u_0 + \frac{u_0^2}{2} \right) \left(\frac{f}{2\Omega} \right)^2 \quad (39)$$

各パラメータは $f = 2\Omega(-\cos \lambda \cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)$ 、 $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}$ 、 $u_0 = 2\pi a/(12 \text{day})$ 、 $h_0 = 2.998 \times 10^3$ 、 $\alpha = 0.0$ とする。誤差の評価は式 (36) で行う。

Fig.6 は格子点数 (a) 60×45 、(b) 120×90 、(c) 180×135 での誤差、Fig.7 は各格子点での誤差の平均を IDO と FDM (移流項: 1 次風上差分、非移流項: 2 次中心差分) で比較した結果である。FDM に比べ IDO は非常によい結果を得ることができた。これは IDO 法が非移流項を高精度に近似できることと、時間、空間の 1 階微分を解析的に持っていることが要因だと考えられる。

4.1.3 テストケース 5 テストケース 5 では中緯度に高い山を置き、それを過ぎる流れの時間発展を追う問題である。このテストの目的は、質量やエネルギーといった保存量がどの程度保存できるかを検証することである。初期条件はケース 2 のときと同じだが、山を配置することにより h_s がゼロでなくなるので、支配方程式がケース 2 のときと異なる。保存誤差は以下の式で評価する。

$$I(\xi(t)) = \frac{I[\xi(t)] - I[\xi(0)]}{I[\xi(0)]} \quad (40)$$

ここで、

$$\xi = h^* \quad (\text{質量}) \quad (41)$$

$$\xi = \frac{1}{2}h^*(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}g(h^2 - h_s^2) \text{ (エネルギー)} \quad (42)$$

である。

Fig.8 は格子点数 128×64 での (a) 初期、(b)5 日後、(c)10 日後、(d)15 日後の自由表面 (h) の等高線図 (50m 間隔) である。また、Fig.9 は保存誤差を FDM (移流項: 3 次風上差分、非移流項: 2 次中心差分) と IDO で比較した結果である。FDM に比べ IDO は保存性が高いことがわかる。

4.2 格子モデルの検証

新格子モデルではメイングリッドの緯度の範囲を $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ としそれ以外の範囲をサブグリッドで置き換えた。

検証問題としてテストケース 1 を用い球面座標系の場合と比較する。ただし、新格子モデルで 2 つの格子を通過するようにパラメータ条件は $\alpha = \pi/3$ とした。

Fig.10 は計算時間と精度 (式 (36) で評価) を比較した結果である。精度に関しては 2 つの格子間を補間しているにもかかわらず、球面座標系の場合とほぼ変わらないことがわかる。また、極付近の格子集中を回避したことにより、計算時間を大幅に減らすことができた。

Fig.11 は極を通過する条件 ($\alpha = \pi/2$) で解いたときのプロファイルの様子である。見てわかるように格子間をまたぐときプロファイルをくずすことなく、極も問題なく通過できることがわかる。

5. 結論

本研究では、球面上で数値計算を行う上での問題点を回避すべく新しい計算モデルの構築を行い検証した。まず、計算スキームには IDO 法を用い、検証問題として Williamson のテストケース 1、2、5 を解いた。いずれのテストケースも非常によい結果を得ることができた。

また、座標系の改善のため重合格子法を用いて極の特異点と極近傍の格子点集中を回避する格子モデルを作成した。格子間の相互作用は CIP-Type C を用いて行った。テストケース 1 を解いた結果、球面座標系の場合と精度はほぼ変わらずに計算時間を大幅に短縮することができた。さらに、極を通過する条件でも問題なく解くことができた。

参考文献

- (1) T.Aoki: Interpolated Differential Operator (IDO) scheme for solving partial differential equations. *Comput. Phys. Commun.*, Vol.102(1997) 132-146.
- (2) K.Sakurai, T.Aoki: Implicit IDO (Interpolated Differential Operator) Scheme, *Comput. Fluid Dynamics Journal*, Vol.8, No. 1 (1999) 6-12.
- (3) K. Sakurai, T. Aoki: A Numerical Procedure to Evolving Contact Discontinuity by using Moving Cut-Cell Method, *Comput. Fluid Dynamics Journal*, Vol.10, No.1 (2001), 76-84.
- (4) T. Aoki, S. Nishita, K. Sakurai: Interpolated Differential Operator (IDO) Scheme and Application to Level Set Method, *Comput. Fluid Dynamics Journal*, Vol.9, No.4 (2001) 406-417.
- (5) 青木尊之, 肖 鋒: 複雑形状の複雑でない計算法, *情報処理*, Vol. 42, No.6 (2001), 550-556.
- (6) T.Aoki: Multi-dimensional Advection of CIP (Cubic-Interpolated Propagation) Scheme, *Comput. Fluid Dynamics Journal*, Vol.4, No. 3 (1995) 279-291.
- (7) D.L.Williamson et.al: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry, *J.Comput.Phys*, Vol.102(1992)211-224.
- (8) R.Jakob-Chen, J.J.Hanck, and D.L.Williamson: Spectral Transform Solutions to the Shallow Water Test Set, *J.Comput.Phys*, Vol.119(1995) 164-187.

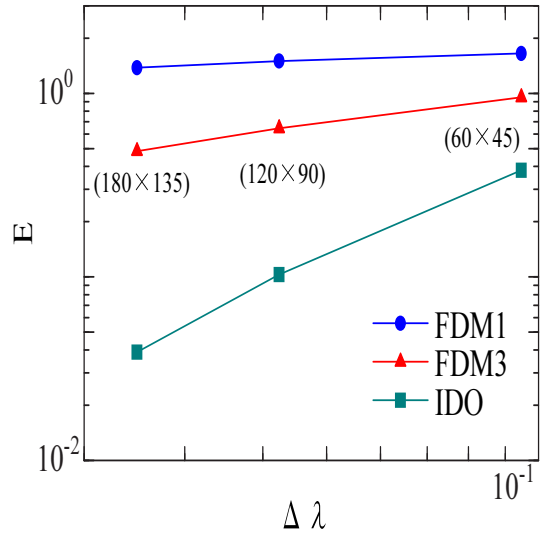
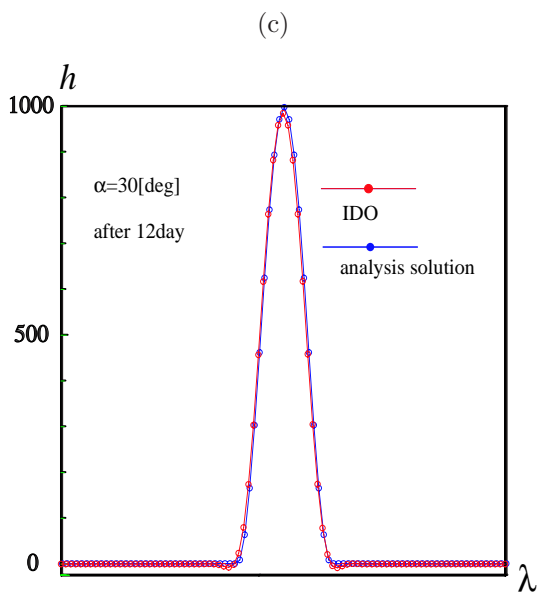
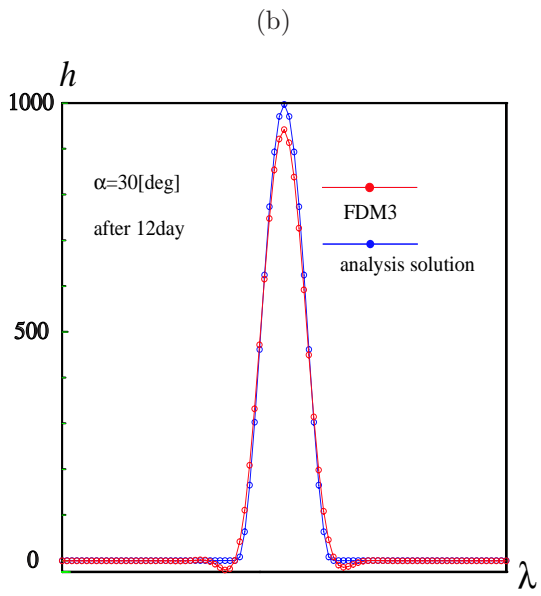
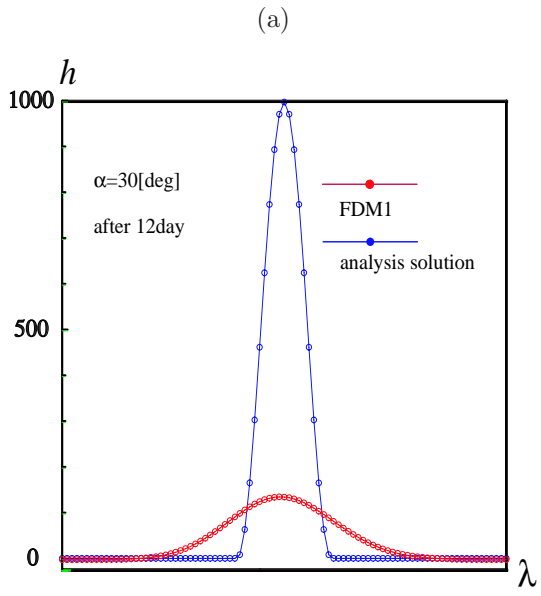


Fig. 5: The deviation from the exact solution versus the grid interval of the longitudinal(λ) in the Case I. :1st-order upwind scheme, :3rd-order upwind scheme, :IDO scheme.

Fig. 4: The cross section of the profile(grid number 180×135) in $\theta = 0$ in the Case I. (a)1st-order upwind scheme,(b)3rd-order upwind scheme,(c)IDO scheme. 6

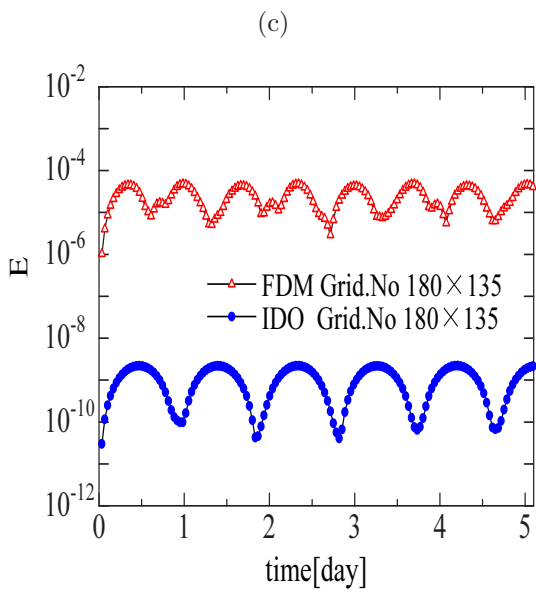
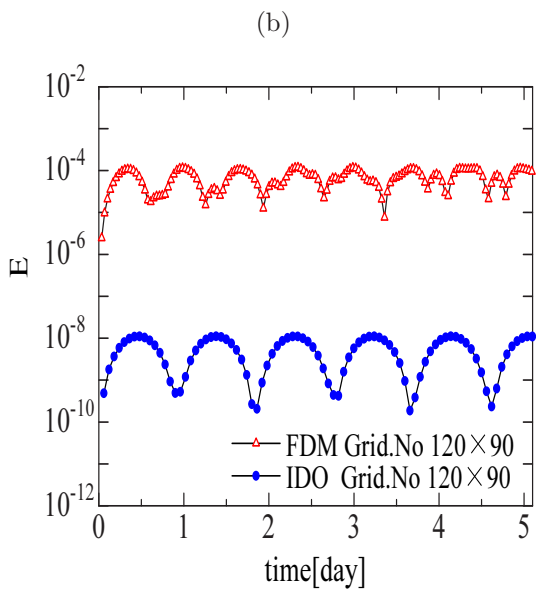
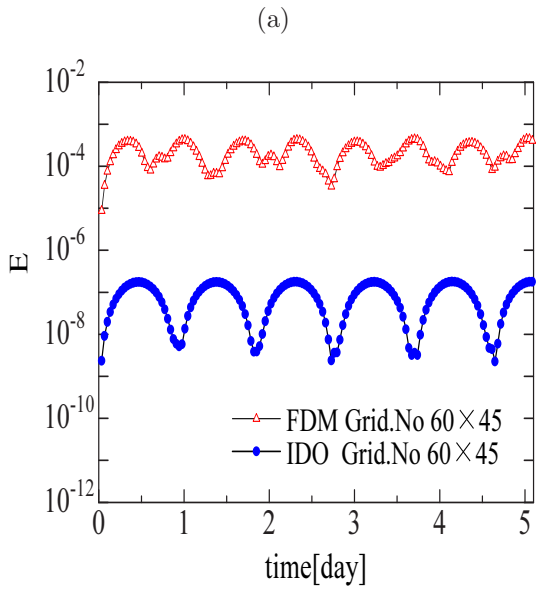


Fig. 6: Time evolution of the error in the Case II. Grid.No.(a) 60×45 (b) 120×90 (c) 180×135 .

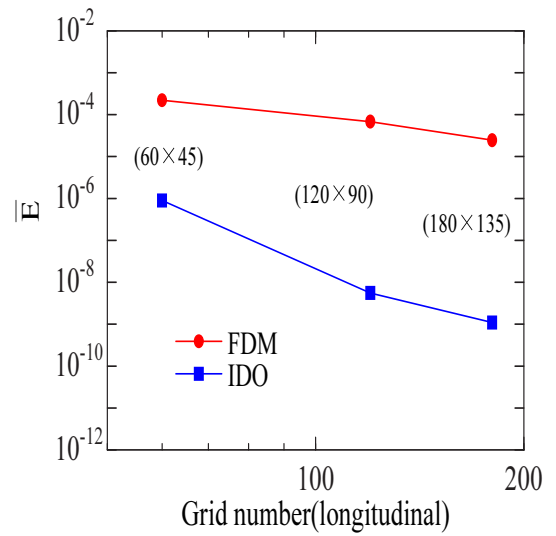


Fig. 7: The average of the error(\bar{E}) versus the grid interval of the longitudinal(λ)in the Case II.

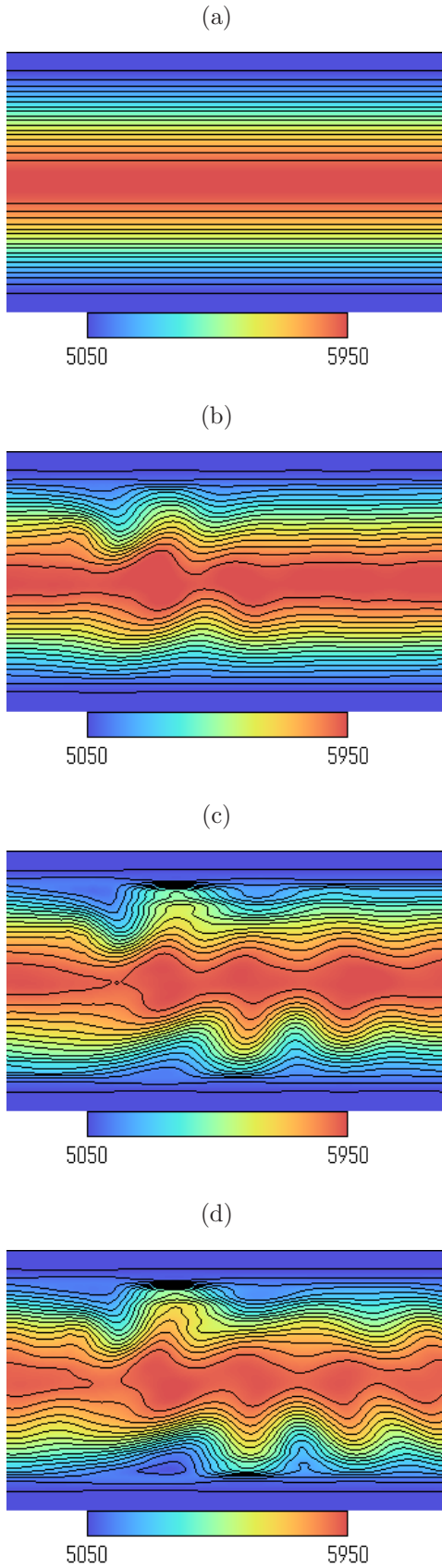


Fig. 8: Contour maps on a rectangular latitude/longitude projection of the height of the free surface (h) in the Case IV. (a) day 0; (b) day 5; (c) day 10; (d) day 15. The contour interval is 50m

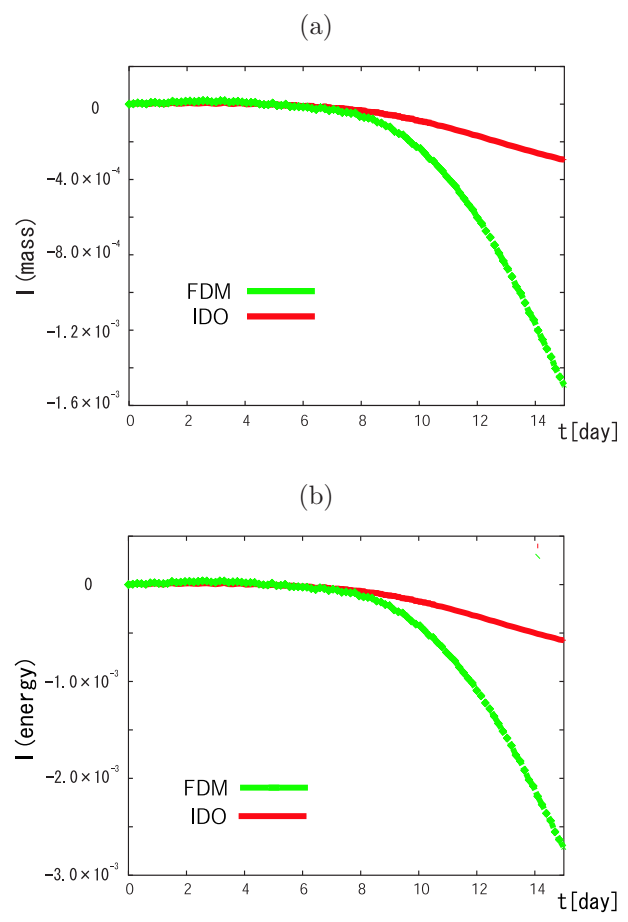


Fig. 9: Time evolution of conservation error (a) mass (b) energy in the Case IV.

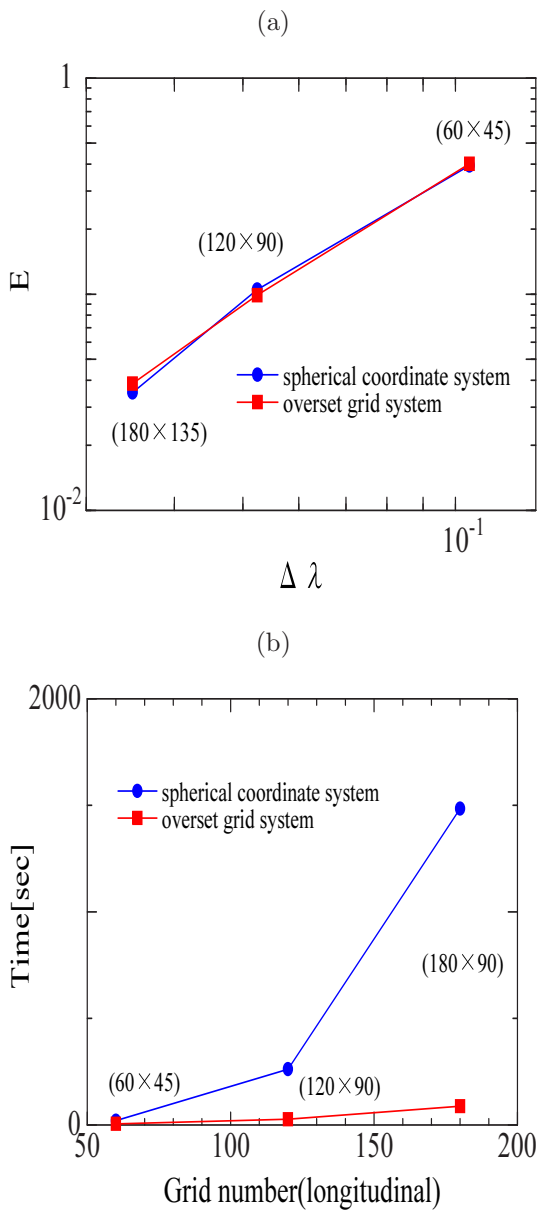


Fig. 10: Comparison of (a)spatial accuracy and (b)computer performance between spherical coordinate system and overset grid system.

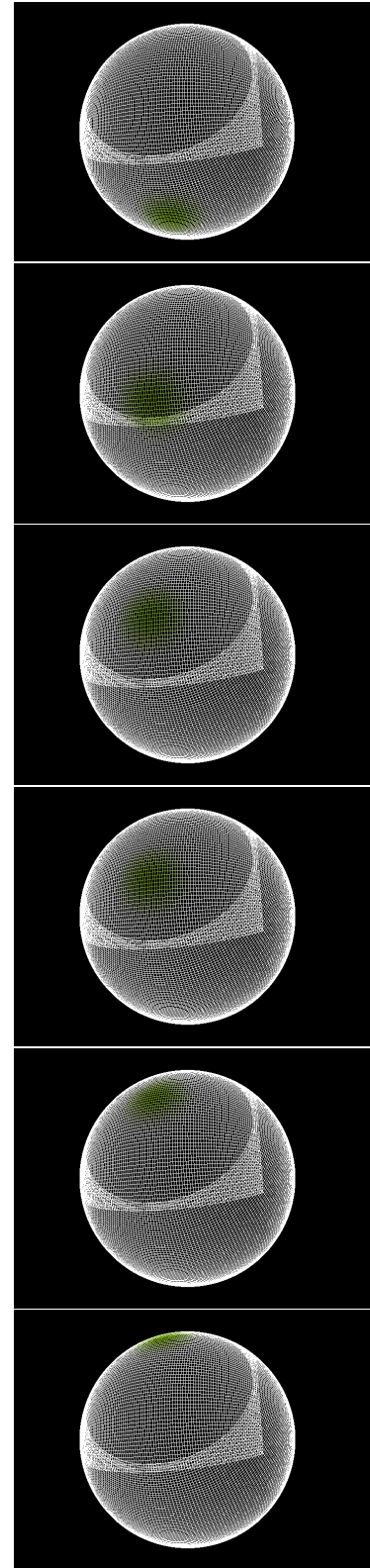


Fig. 11: Advected of Cosine Bell over the Pole on the Overset grid system in the Case I.