非線形保存則に対する高精度スキームの開発

Arbitrarily Accurate Non-Oscillatory Schemes for a Nonlinear Conservation Law

○高倉　葉子, 東京農工大学工学部, 〒184-8588 小金井市中町2-24-16, E-mail: takakura@cc.tuat.ac.jp
イレウテリオ　トロ, マンチェスター・メトロポリタン大学, 英国, E-mail: E.F.Toro@doc.mmu.ac.uk
Yoko TAKAKURA, Tokyo Noko Univ., Dept. of Mech. Systems Eng., Koganei, Tokyo 184-8588, JAPAN
Eleuterio F. TORO, Manchester Metropolitan Univ., Dept. of Comput. and Math., Chester Street, M15GD, UK

The ADER approach for constructing non-oscillatory explicit one-step schemes with very high order of accuracy in space and time has been extended to nonlinear scalar conservation laws. The extension of the ADER from a linear equation to a nonlinear equation has choice of two methods: one is based on the state-series expansion and another is based on the direct expansion for flux functions. Regarding the direct expansion, three methods have been presented to replace time derivatives of flux with space derivatives of state and flux. The accuracy of methods based on the direct expansion has been analyzed, together with the discussion on how to increase the convergence rate. By using the presented methods it is possible to design arbitrary accurate non-oscillatory schemes in principle. Numerical verification for the ADER up to the 5-th order of accuracy showed that the expected convergence rate has been achieved, and advantages compared with the ENO and WENO schemes has been discussed.

ADER法[1] は、関数の時間に関するTayler級数展開を空間微係数で置き換え、ENOあるいはWENO補間によりデータを再構築した上で、空間微係数に対するリーマン問題を解き、一般リーマン問題の解を構築するものである。

時刻t_n、空間セル$I_i=[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$における$q$の空間セル内平均値を$q_i^n$とし、保存スキームを扱う。

$$q_i^{n+1}=q_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}\right]. \qquad (1)$$

解データq_i^nをENOあるいはWENO補間により再構築し、区間I_i, I_{i+1}における補間多項式を$q_i(x), q_{i+1}(x)$として、以下の一般リーマン問題を考える。

$$\text{PDE:}\quad \partial_t q+\partial_x f(q)=0 \qquad (2)$$

$$\text{IC:}\quad q(x,0)=\begin{cases} q_i(x) & \text{if}\quad x<0 \\ q_{i+1}(x) & \text{if}\quad x>0 \end{cases} \qquad (3)$$

方程式(2)は$\partial_t q+\lambda(q)\,\partial_x q=0$ ($\lambda(q)=\frac{df}{dq}$) と書けるので、(2)(3)式をxでk回微分すると、下式を得る。($v^{(k)}\equiv\partial_x^{(k)}q$)

$$\text{PDE:}\quad \partial_t v^{(k)}+\lambda\,\partial_x v^{(k)}=rhs^{(k)} \qquad (4)$$

$$\text{IC:}\quad v^{(k)}(x,0)=\begin{cases} \partial_x^{(k)}q_i(x) & \text{if}\quad x<0 \\ \partial_x^{(k)}q_{i+1}(x) & \text{if}\quad x>0 \end{cases} \qquad (5)$$

$x=0,\,t\to+0$における(4)(5)式の解は、微分リーマン問題

$$\text{PDE:}\quad \partial_t v+\lambda\,\partial_x v=0 \qquad (6)$$

$$\text{IC:}\quad v(x,0)=\begin{cases} q_L^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}} & \text{if}\quad x<0 \\ q_R^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}} & \text{if}\quad x>0 \end{cases} \qquad (7)$$

の相似解 $w(x/t)$ の $x/t=0$ における値 $v^*(q_L^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}},\ q_R^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}})$ で与えられる。ここに

$$\begin{cases} q_L^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}} \equiv lim_{x\to x_{i+\frac{1}{2}}^-}\,\partial_x^{(k)}q_i(x) \\ q_R^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}} \equiv lim_{x\to x_{i+\frac{1}{2}}^+}\,\partial_x^{(k)}q_{i+1}(x) \end{cases} \qquad (8)$$

一方qの時間に関するk階微分は、(2)式をtで順次微分して空間微分で置き換えることにより得られる。

$$\partial_t^{(k)}q=\alpha^{(k)}(\,q_x^{(0)},q_x^{(1)},\cdots,q_x^{(k)}\,) \qquad (9)$$

関数qは、時間に関するTayler級数展開から、

$$q(0,\tau)=q(0,0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\tau^k}{k!}\,\partial_t^{(k)}q(0,0)+O(\,\tau^m) \qquad (10)$$

と表せるので、一般リーマン問題(2)(3)の解は、

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{GRP}(0,\tau)=q_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\tau^k}{k!}\,\alpha^{(k)}(q_{i+\frac{1}{2}}^{(0)},q_{i+\frac{1}{2}}^{(1)},\cdots,q_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}) \qquad (11)$$

により与えられる。ここに $q_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}$ は、$x/t=0$ における微分リーマン問題(6)(7)の解$v^*(q_L^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}},\ q_R^{(k)}{}_{i+\frac{1}{2}})$ である。数値流束は、下式を数値積分することにより得られる。

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{ader}=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} f(\,q_{i+\frac{1}{2}}^{GRP}(0,\tau)\,)\,d\tau \qquad (12)$$

発表当日は、流束関数の直接展開

$$f(0,\tau)=f(0,0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\tau^k}{k!}\,\partial_t^{(k)}f(0,0)+O(\,\tau^m) \qquad (13)$$

に基づく方法もあわせて示し、精度の実証計算例を示す。

参考文献

(1) Toro, E.F., Godunov Methods: Theory and Applications. Toro, E.F. (Editor), Kluwer/Plenum Academic Publishers, 2001, pp.905-938.