

## 局所前処理法を用いた TVD 法による低マッハ数流れの数値計算法 Computations at Low Mach Flow using a TVD Scheme with a Local Preconditioning

有馬敏幸, 本田技術研究所, 埼玉県和光市中央 1-4-1, E-mail: arima@f.rd.honda.co.jp

Toshiyuki ARIMA, Honda R&D Co., Ltd. 1-4-1 Chuo Wako-shi Saitama 351-0193 Japan

A local preconditioning technique is implemented into an approximately-factored algorithm and a TVD scheme for the numerical method of compressible Navier-Stokes equations with conservative variables. To examine the implemented method, share-driven cavity flows at low and channel flow at high Mach number are calculated. Furthermore, the  $k-\omega$ -SST turbulent model was built in and the high-Re flows around the NACA633-018 airfoil was calculated as a real problem. For Mach number below 0.2, the convergence rate and accuracy of the solver are significantly improved compared to the original compressible-flow solver.

### 1. はじめに

圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式) に対する数値解法として Beam-Warming タイプの時間進行法を非圧縮性に近い流れ場に適用すると、精度、計算効率において数値計算が破綻することが知られている。しかしながら、ガスタービンエンジンのタービン翼の翼間流れでは、翼後縁部付近において衝撃波を伴う様な場合においても、圧力面の近傍では殆ど非圧縮性と考えられるような低速な流れ領域が存在する。従って、このような流れ場の数値解析には圧縮性が問題になる高速流れから殆ど非圧縮性とみなされる低速流れまで統一して扱える数値計算コードが求められる。Tukel<sup>(4)</sup> は流れの原始変数  $p, u, T$  を未知数として、低マッハ数の時に擬似圧縮性方程式<sup>(1)</sup> に漸近するように Preconditioner を設計した。しかし、これらの方法は NS 方程式の従属変数を保存変数から原始変数へ変換しているため、既存の圧縮性コードからの書き換えの際には新しいコードを最初から開発するのが殆ど同じくらいな労力を伴う。本研究の目的は、圧縮性流れに対する計算コードでは保存変数が最も一般的に用いられていることを考慮して、Preconditioning 法を保存変数を未知数としたまま適用する手法を開発しその有効性を示すことである。

### 2. 支配方程式

支配方程式として保存変数を未知数とする 2 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いる。完全気体の 2 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式は保存形ベクトル表示を用いて曲線座標で、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = Re^{-1} \left[ \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right] \quad (1)$$

と記述される。ここで、従属変数は次の保存変数である。

$$Q = \frac{1}{J} [\rho, \rho u, \rho v, e]^t,$$

### 3. Preconditioning を施す前の数値計算法

Preconditioning を施す前の数値計算法について復習しておく。圧縮性粘性流れの支配方程式 (1) に対して、時間微分に Euler 陰解法を用い、空間微分を時間に関して線形化を行い、近似因子化法を用いると、

$$\begin{aligned} & [I + \Delta t \delta_\xi A^n - \Delta t Re^{-1} \delta_\xi K_\xi^n] \\ & \cdot [I + \Delta t \delta_\eta B^n - \Delta t Re^{-1} \delta_\eta K_\eta^n] \Delta Q^n \\ & = RHS^n \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、

$$\Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} RHS^n = & -\Delta t [\delta_\xi E(Q^n) + \delta_\eta F(Q^n)] \\ & - Re^{-1} \{ \delta_\xi R(Q^n) + \delta_\eta S(Q^n) \} \end{aligned} \quad (4)$$

である。また、記号  $\delta$  は人工粘性を含めた空間に対する離散化オペレータを意味する。ここで、行列  $A, B$  は各方向の対流項ヤコビアン行列を、 $K_\xi, K_\eta$  は粘性項ヤコビアン行列を表す。ここで、更に式 (2) に Pulliam の対角化を施すと、

$$\begin{aligned} & T_\xi [I + \Delta t \delta_\xi \Lambda_\xi - \Delta t Re^{-1} \delta_\xi^2 \Lambda_\xi^v] T_\xi^{-1} \\ & T_\eta [I + \Delta t \delta_\eta \Lambda_\eta^v - \Delta t Re^{-1} \delta_\eta^2 \Lambda_\eta^v] T_\eta^{-1} \Delta Q^n \\ & = RHS^n \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、行列  $\Lambda_\xi, \Lambda_\eta$  は各方向の対流項に対するヤコビアン行列  $A, B$  の固有値を対角成分とする対角行列、 $T_\xi, T_\eta$  は各々  $A, B$  の右固有ベクトルをを列とする行列を表している。また、粘性項ヤコビアン行列は対流項ヤコビアンと全く異なった固有ベクトルを持つが、対角化アルゴリズムの効率化と左辺の近似による定常解への影響はないものとの推察から最大スペクトル半径を用いて近似される。以上の様にして式 (5) は、既知の行列を掛けることと、スカラーの 3 重対角行列を反転することで  $\Delta Q^n$  を求めることができる。

### 4. Local Preconditioning

対流項のヤコビアン行列  $A, B$  は、 $U_\xi, U_\eta$  を  $\xi, \eta$  方向の反変速度、 $c$  を音速とすると、各々、 $U_\xi, U_\xi \pm c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$  および、 $U_\eta, U_\eta \pm c \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$  の固有値を有する。ここで、流れが非圧縮性に近づくと ( $c \rightarrow \infty$ ) 第 3 番目と 4 番目の固有値の絶対値は大きく異なる様になり stiffness の問題が発生する。そこで前処理行列  $\Gamma$  を用いて次のように前処理を行う。

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = Re^{-1} \left[ \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right] \quad (6)$$

前処理されたことにより元のナビエ・ストークス方程式の時間精度を破壊するが、定常解への影響はないと考えられる。また、上式の左から  $\Gamma^{-1}$  を掛け非保存形式で書けば、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \Gamma^{-1} A \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \Gamma^{-1} B \frac{\partial Q}{\partial \eta} = Re^{-1} \Gamma^{-1} \left[ \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right] \quad (7)$$

となり、前処理をされたヤコビアン行列は、 $\Gamma^{-1} A, \Gamma^{-1} B$  となることが分かる。前処理行列として  $\Gamma$  を適切に選べ

ば、最大固有値と最小固有値の比を1に近づけることが可能である。本研究では、保存変数に対する前処理行列 $\Gamma$ は、Symmetry variable、 $\partial Q = \frac{1}{J}(\frac{1}{\rho c} \partial p, \partial u, \partial v, \partial s)^t$  に対する前処理行列を

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

とし、変数変換を施すことによって求めた。ここで、 $\epsilon$ は、 $M$ を局所マッハ数、 $M_\infty$ を一様流マッハ数、 $\phi$ をパラメーターとして、 $\epsilon = \min[1, \max(M^2, \phi M_\infty^2)]$  表される。即ち、変数変換行列、 $M = \frac{\partial Q}{\partial \hat{Q}}$ を用いて、

$$\Gamma = M \hat{\Gamma} M^{-1} \quad (9)$$

より求める。また、 $\Gamma^{-1}A, \Gamma^{-1}A$ は対角化可能であり、

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}A &= T_{\xi, \Gamma} \Lambda_{\xi, \Gamma} T_{\xi, \Gamma}^{-1} \\ \Gamma^{-1}B &= T_{\eta, \Gamma} \Lambda_{\eta, \Gamma} T_{\eta, \Gamma}^{-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、添字 $\Gamma$ は前処理をされた系に対応することを示す。これらの関係を用いて、前処理を施した保存変数を未知変数とするナビエ・ストークス方程式に対する対角化ADI法は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \Gamma T_{\xi, \Gamma} [I + \Delta t (\delta_\xi \Lambda_{\xi, \Gamma} - Re^{-1} \delta_\xi^2 \Lambda_{\xi, \Gamma}^v)] T_{\xi, \Gamma}^{-1} T_{\eta, \Gamma} \\ & \cdot [I + \Delta t (\delta_\eta \Lambda_{\eta, \Gamma} - Re^{-1} \delta_\eta^2 \Lambda_{\eta, \Gamma}^v)] T_{\eta, \Gamma}^{-1} \Delta Q \\ & = RHS^n \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $RHS^n$ は式(4)で与えられる。 $\Lambda_{\xi, \Gamma}^v, \Lambda_{\eta, \Gamma}^v$ は前処理に対応した簡略化された粘性項ヤコビアン行列から現れる項である。

## 5. 人工粘性

前処理を行う場合、人工粘性についても前処理された系に対応した人工粘性を用いる必要がある。Chakravarthy and OsherによるTVD法については前処理された系で、例えば $\xi$ 方向について、

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta \xi} (E_{j+\frac{1}{2}} - E_{j-\frac{1}{2}}) \quad (11)$$

と書くとき、

$$\begin{aligned} E_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (E_{j+1} - E_j) \\ &+ \Gamma_{j+\frac{1}{2}} T_{\xi, \Gamma, j+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{1}{2} (\sigma_{j+\frac{1}{2}}^+ - \sigma_{j+\frac{1}{2}}^-) \right. \\ &- \frac{1-\phi}{4} \text{minimod}(\sigma_{j+\frac{3}{2}}^-, \beta \sigma_{j+\frac{1}{2}}^-) \\ &- \frac{1+\phi}{4} \text{minimod}(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^-, \beta \sigma_{j+\frac{3}{2}}^-) \\ &+ \frac{1+\phi}{4} \text{minimod}(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^+, \beta \sigma_{j-\frac{1}{2}}^+) \\ &\left. + \frac{1-\phi}{4} \text{minimod}(\sigma_{j-\frac{1}{2}}^+, \beta \sigma_{j+\frac{1}{2}}^+) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、 $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ は各波を跨いで物理量の跳びを示し、

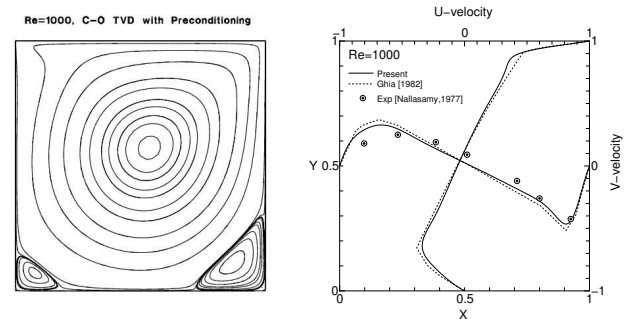
$$\sigma_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \Lambda_{\xi, \Gamma, j+\frac{1}{2}}^\pm T_{\xi, \Gamma, j+\frac{1}{2}}^{-1} (Q_{j+1} - Q_j) \quad (13)$$

## 6. 無限遠方流れ条件

遠方境界条件は、前処理により特性変数に変更されるため前処理された系における値を用いて変更する必要がある。本研究では、遠方境界条件は前処理されたヤコビアン行列の固有値の符号によりその処理法を決定する。例えば、正の固有値がincoming、負の固有値がoutgoingに対応する境界では、正の固有値に対応する値を固定し、負の固有値に対応する値は計算領域から外挿する。

## 7. 計算コードの検証

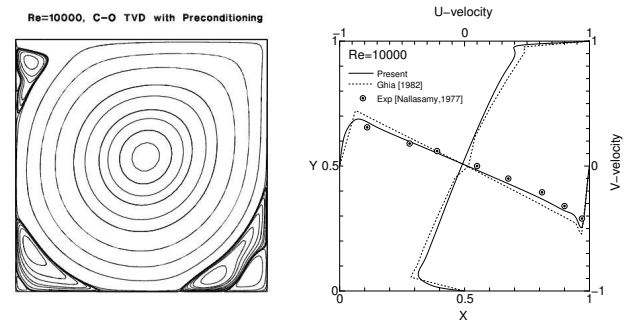
開発したコードの検証を目的に、低速流れに対してはマッハ数 $M = 0.01$ のキャビティ流れを $Re = 1000, 10000$ の2ケースについて、Ghia<sup>(2)</sup>による非圧縮性の計算結果とNallasamy<sup>(2)</sup>の実験結果と比較した。また、高速流れに対しては図3に示す超音速チャンネル流れを、NS方程式から粘性項をはずしたEuler方程式を用いて計算し理論解と比較を行った。図1, 図2に $M = 0.01$ のときの $Re = 1000$ 及び $Re = 10000$ に対するキャビティ流れの結果を各々示す。また、図4に $M = 2$ のときの密度の等高線を、図5にその時のチャンネル底面における密度と圧力について理論計算との比較結果を示す。これらの結果より、低速流れ、高速流れともに良好な一致が確認された。



(a) streamline

(b) velocity profile

Fig. 1: Cavity flow,  $Re = 1000, M_{in} = 0.01$



(a) streamline

(b) velocity profile

Fig. 2: Cavity flow,  $Re = 10000, M_{in} = 0.01$

## 8. 実問題に対する数値計算

### 8.1 乱流モデル

実問題への適用に際して信頼性のある解を得るためには乱流モデルを適用する必要がある。ここでは、Menter<sup>(3)</sup>による $k-\omega$ -SSTモデルを用いた。 $k-\omega$  modelは境界層内の粘性底層と対数領域では $k-\epsilon$  modelより精度が高いが、境界層の外側では主流の $\omega$ の値に強く影響を受けるため、 $k-\omega$  modelは伴流領域においては理想的なモデルではない。一方、 $k-\epsilon$  modelは境界層内部では $k-\omega$  modelに劣るものの境界層外側や伴流領域では $k-\omega$  model

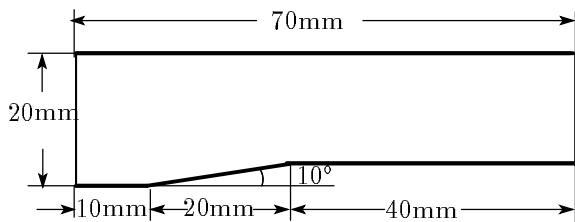


Fig. 3: Two dimensional channel

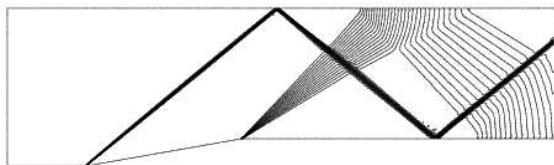
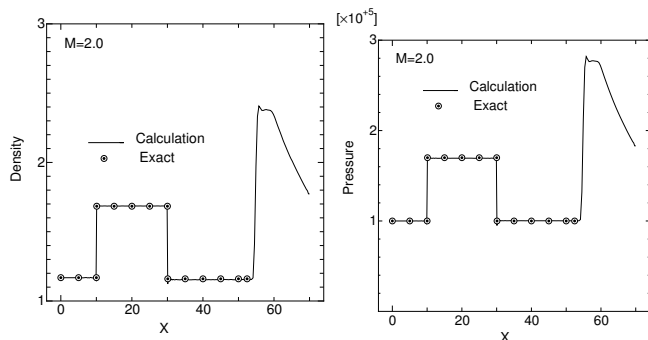


Fig. 4:  $M_1 = 2.0$ , density contour



(a) density

(a) pressure

Fig. 5: comparison to exact solution

デルより適切な振る舞いをする。Menter<sup>(3)</sup> はこれらの性質を考慮して、 $k-\omega$  モデルと  $k-\varepsilon$  モデルを結合して新たに Base Line (BSL) model と Share-Stress Transport (SST) model の 2つの 2 方程式モデルを同時に提案している。SST では逆圧力勾配のある流れ場において特に重要な乱流せん断応力の輸送という Johnson-King モデルの思想が取り入れられている。

## 8.2 NACA 翼周りの流れ

$k-\omega$ -SST モデルを用いて、NACA633-018 に対して迎角が 6 度と 12 度の場合の計算を実施した。ただし、 $k, \omega$  に対する方程式には前処理は施していない。

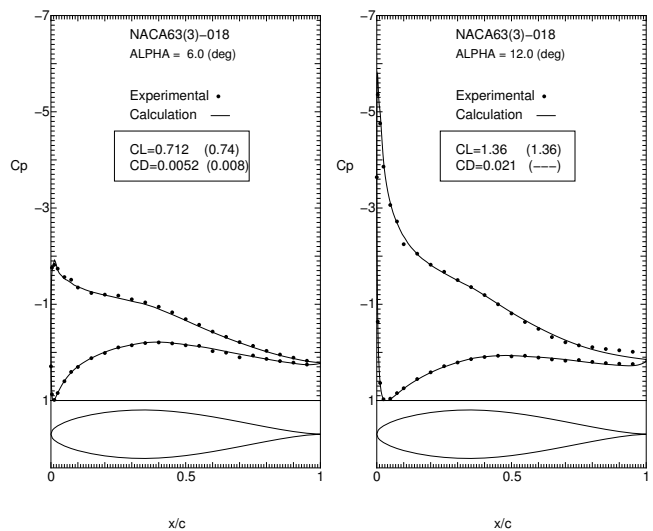
図 6 に迎角が 6 度と 12 度の場合の  $C_p$  分布を示す。また、図 7 に圧力の等値線図を示す。図 6,7 より計算結果と実験結果は非常に良く相関していることが分かる。

## 9. まとめ

圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) に対する数値計算法として、流れの従属変数を保存変数のまま Preconditioning 法を行う手法を提案した。

本手法は、従来の高速流れに対する圧縮性 NS 方程式に対する数値計算法においては保存変数を従属変数とする場合が多いことを考慮すると、既存の高速流れ用の数値計算コードからのプログラム変更が比較的容易になるという特徴がある。

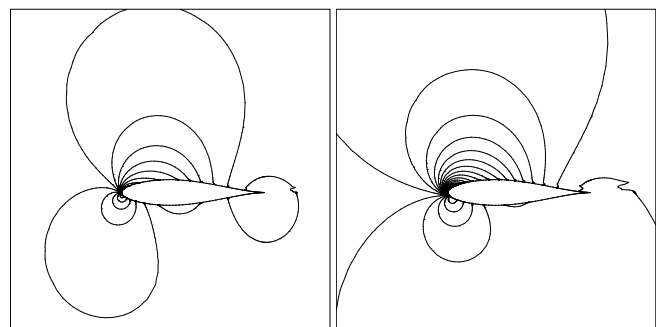
開発した手法の検証を目的として、低速キャビティ流れと超音速チャンネル内流れを計算した。その結果本手法が正しい計算結果を示すことが確認された。



(a)  $\alpha = 6deg$

(b)  $\alpha = 12deg$

Fig. 6:  $C_p$  distribution, NACA633-018



(a)  $\alpha = 6deg$

(b)  $\alpha = 12deg$

Fig. 7: pressure distribution, NACA633-018

最後に実問題として、NACA633-18 翼に対して  $k-\omega$ -SST モデルを組み込み単翼周り流れ計算に適用した。本手法による計算結果が実験結果と非常に良い一致を示すことが確認され、本手法の有効性が実証された。

## 参考文献

- [1] Chorin, A. J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, **2**, (1967), pp. 12-26.
- [2] Ghia, K. U., Ghia, N. and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, **48**, (1982), pp. 387-411.
- [3] Menter, F. R., "Two-Equation Eddy-viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA Journal*, **32**, No. 8, (1994), pp. 1598-1605.
- [4] Turkel, E., "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, **72**, (1987), pp. 227-298.