

不等間隔スタガード格子に対する時間-空間完全保存形の 高次精度差分スキーム

On Space-Time Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes on Non-Uniform Staggered Meshes

森西 洋平, 名工大, 〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町,

E-mail: morinisi@cfm.mech.nitech.ac.jp

Youhei Morinishi, Nagoya Institute of Technology,

Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, Aichi, 466-8555, Japan

The objective of this study is to construct fully conservative higher order finite difference schemes on non-uniform staggered meshes. First, the governing equations for incompressible flow are written in general orthogonal curvilinear coordinate system. Then, space-time energy conservation scheme for the orthogonal curvilinear coordinate system is proposed on non-uniform staggered meshes. Finally, fully conservative fourth order accurate staggered scheme on non-uniform meshes is proposed. Proposed schemes conserve kinetic energy on inviscid flow provided that the discrete continuity is satisfied.

1. はじめに

LESやDNSのような乱流の非定常数値計算において、非物理的な数値粘性等を加えることなく長時間の数値積分を安定に実行するためには、非粘性の極限で質量および運動量に加えて運動エネルギーも同時に離散的に保存する完全保存形差分スキーム（エネルギー保存形差分スキーム）の使用が望まれる。非圧縮性流体の数値計算に適するスタガード格子での空間2次精度の完全保存形差分スキームとしては、Harlow and Welch (1965), Piacsek and Williams (1970) および梶島 (1994) によるものがある。空間4次精度以上の完全保存形差分スキームは森西 (1996), Morinishi et al. (1998) により提案されている。以上の差分スキームは等間隔格子においてのみ精度が維持される。Vasilyev (2000) は Morinishi et al. (1998) の差分スキームの不等間隔格子への拡張を試みているが、これは不完全なものである。

近年、空間2次精度で不等間隔格子に適用可能な完全保存形差分スキームが梶島 (1999) および Ham et al. (2001) により提案されている。これらは空間的には等価な差分スキームである。Ham et al. (2001) ではさらに、エネルギーノルムを定義することで運動エネルギーを時間的にも保存する離散式が構成されている。しかし、離散式の表現に非対称な離散演算子が用いられているため、そのままでは空間高次精度化が困難で

ある。

本講演では、より一般的な議論を行うため、まず物理成分表示された直交曲線座標系で流体運動の基礎方程式を記述した後、直交座標系での不等間隔スタガード格子で時間および空間的に運動エネルギーが保存される時間-空間2次精度の差分スキームを構成する。次に、直角座標の不等間隔スタガード格子に対する完全保存形差分スキームの空間高次精度化を行う。

2. 直交曲線座標系での運動エネルギー保存特性

2.1 直交曲線座標系の基礎方程式

不等間隔スタガード格子の時間-空間完全保存形（エネルギー保存形）差分スキームの直交曲線座標系への拡張をより一般的に展開するため、ここでは Demirdzic et al. (1987) による物理成分の一般曲線座標系の表記を直交曲線座標に適用し、連続の式および運動方程式を記述する。これにより、直角座標に加え、直交曲線座標系（円筒座標、球座標、トロイダル座標等を含む）での不等間隔スタガード格子の差分スキームを統一的に扱うことが可能となる。ここで使用されるテンソル解析の詳細については Demirdzic et al. (1987) および Aris (1989) を参照されたい。

まず、直角座標系の独立変数 (x_1, x_2, x_3) と直交曲線座標系の独立変数 $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ との間の1対1の対応

関係,

$$x_i = x_i(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\zeta^i = \zeta^i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

を定める。これらより、直交曲線座標系でのスケール因子 h_i 、ヤコビアン $\sqrt{g}$ および物理的クリストッフェル記号が定められる。

$$h_i = \sqrt{\frac{\partial x_j}{\partial \zeta^i} \frac{\partial x_j}{\partial \zeta^i}}, \quad i : \text{no sum} \quad (3)$$

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3, \quad (4)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i \\ k, j \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{h_j} \left(\frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta^k} \delta_{ij} - \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial \zeta^i} \delta_{kj} \right), \quad (5)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i \\ k, j \end{smallmatrix} \right) = - \left(\begin{smallmatrix} k \\ i, j \end{smallmatrix} \right) \quad (6)$$

また、スカラー ϕ 、直交曲線座標系での物理的ベクトル成分 $V^{(i)} (= V_{(i)})$ および物理的2階テンソル $T^{(ij)} (= T_{(ij)})$ の物理的共変微分を次のように定義する。

$$\phi|_{(j)} = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^j} \quad (7)$$

$$V^{(i)}|_{(j)} = \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \zeta^j} + V^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} i \\ k, j \end{smallmatrix} \right) \quad (8)$$

$$V_{(i)}|_{(j)} = \frac{\partial V_{(i)}}{\partial \zeta^j} - V_{(k)} \left(\begin{smallmatrix} k \\ i, j \end{smallmatrix} \right) \quad (9)$$

$$T^{(ij)}|_{(k)} = \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial \zeta^k} + T^{(i\ell)} \left(\begin{smallmatrix} j \\ \ell, k \end{smallmatrix} \right) + T^{(\ell j)} \left(\begin{smallmatrix} i \\ \ell, k \end{smallmatrix} \right) \quad (10)$$

$$T_{(ij)}|_{(k)} = \frac{\partial T_{(ij)}}{\partial \zeta^k} - T_{(i\ell)} \left(\begin{smallmatrix} \ell \\ j, k \end{smallmatrix} \right) + T_{(\ell j)} \left(\begin{smallmatrix} i \\ \ell, k \end{smallmatrix} \right) \quad (11)$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial \zeta^j}, \quad j : \text{no sum} \quad (12)$$

である。

(物理的) 速度成分を $U^{(i)} (= U_{(i)})$, (物理的) 粘性応力テンソルを $\tau^{(ji)} (= \tau_{(ij)}^{(j)})$, 運動方程式での (物理的) 外力成分を $F^{(i)} (= F_{(i)})$, 圧力を p , 密度 (定数) を ρ , 時間を t とすれば、直交曲線座標系の連続の式および運動方程式は次式で一般的に表現される。

$$U^{(j)}|_{(j)} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + (U^{(j)} U^{(i)})|_{(j)} &= -\frac{1}{\rho} p|_{(j)} \delta^{ji} \\ &\quad + \tau^{(ji)}|_{(j)} + F^{(i)} \end{aligned} \quad (14)$$

運動方程式については共変成分を意識した次式,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + (U^{(j)} U^{(i)})|_{(j)} &= -\frac{1}{\rho} p|_{(i)} \\ &\quad + \tau_{(i)}^{(j)}|_{(j)} + F_{(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

でも記述できるが、直交曲線座標においてこれは式 (14) と等価である。

2.2 対流項の型の互換性とエネルギー保存特性

式 (14) の左辺第2項の対流項は発散型 ($Div.$)⁽ⁱ⁾ で記述されているが、勾配型 ($Adv.$)⁽ⁱ⁾, 混合型 ($Adv.$)⁽ⁱ⁾ によっても記述可能である。

$$\begin{aligned} (Div.)^{(i)} &= (U^{(j)} U^{(i)})|_{(j)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} U^{(i)} \right] + U^{(j)} U^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} i \\ k, j \end{smallmatrix} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (Adv.)^{(i)} &= U^{(j)} (U^{(i)}|_{(j)}) \\ &= U^{(j)} \frac{1}{h_j} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta^j} + U^{(j)} U^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} i \\ k, j \end{smallmatrix} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$(Skew.)^{(i)} = \frac{1}{2} (Div.)^{(i)} + \frac{1}{2} (Adv.)^{(i)} \quad (18)$$

これらの対流項の型は、速度の発散,

$$(Cont.) = U^{(j)}|_{(j)} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] (= 0) \quad (19)$$

がゼロ (連続の式 (13) が成立) の場合に、次式のように互換となる。

$$(Div.)^{(i)} = (Adv.)^{(i)} + U^{(i)} (Cont.), \quad (20)$$

$$(Skew.)^{(i)} = (Div.)^{(i)} - \frac{1}{2} U^{(i)} (Cont.) \quad (21)$$

$$= (Adv.)^{(i)} + \frac{1}{2} U^{(i)} (Cont.) \quad (22)$$

$$(23)$$

式 (14) あるいは (15) から運動エネルギー $K = \frac{1}{2} U^{(i)} U_{(i)} (= \frac{1}{2} U^{(i)} U^{(i)})$ の輸送方程式を作ると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + (U^{(j)} K)|_{(j)} &= -\frac{1}{\rho} (U^{(i)} p)|_{(i)} \\ &\quad + \left(U^{(i)} \tau_{(i)}^{(j)} \right)|_{(j)} - \tau_{(i)}^{(j)} (U^{(i)}|_{(j)}) + U^{(i)} F^{(i)} \end{aligned} \quad (24)$$

上式左辺第2項は運動方程式の対流項、右辺第1項は運動方程式の圧力項に起因する項で、一般曲線座標系においても保存形で記述できる。運動方程式の粘性項および外力項に起因する右辺第3項および右辺第4項は保存形では記述されない。これより、非粘性でエネルギー供給が無い場合に、連続の式と運動方程式は運動エネルギー保存則を導く。

混合型の対流項 ($Skew.$)⁽ⁱ⁾ に関する運動エネルギー保存特性は次式により確認される.

$$\begin{aligned}
U^{(i)}(Skew.)^{(i)} &= \frac{1}{2} \left\{ U^{(i)} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} U^{(i)} \right] \right. \\
&\quad \left. + U^{(i)} U^{(j)} \frac{1}{h_j} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta^j} + 2U^{(i)} U^{(j)} U^{(k)} \begin{pmatrix} i \\ k, j \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} U^{(i)} U^{(i)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} K \right] \quad (25)
\end{aligned}$$

つまり, 連続の式の成立に関わらず, 混合型 ($Skew.$)⁽ⁱ⁾ は運動エネルギーに関して保存形を与える. 一方, 式 (25), および式 (21) と (22) の互換性から, 発散型 ($Div.$)⁽ⁱ⁾ および勾配型 ($Adv.$)⁽ⁱ⁾ は連続の式が成立する場合 ($(Cont.) = 0$) に運動エネルギーに関して保存形を与える. また, 圧力項 ($Pres.$)⁽ⁱ⁾,

$$(Pres.)^{(i)} = \frac{1}{\rho} \left(p|_{(j)} \delta^{ji} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial p}{\partial \zeta^i} \right) \quad (26)$$

の運動エネルギー保存特性は,

$$\begin{aligned}
U^{(i)} (Pres.)^{(i)} &= U^{(i)} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial p}{\partial \zeta^i} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_i} U^{(i)} p \right] - \frac{p}{\rho} (Cont.) \quad (27)
\end{aligned}$$

で確認される. つまり, 連続の式が成立する場合に ($Pres.$)⁽ⁱ⁾ は運動エネルギーに関して保存形を与える.

以上の運動エネルギー保存特性に関する議論は Morinishi *et al.* (1998) での議論を直交曲線座標系に拡張したものである.

3. 直交曲線座標系の不等間隔スタガード格子に対するエネルギー保存形差分スキーム

3.1 離散式の定義

差分スキームの簡潔な表記のため, 補間および差分オペレーターを以下に定義する. ここで, $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ は直交曲線座標系の独立変数に対応した計算面上の独立変数, $\Delta\zeta^1, \Delta\zeta^2, \Delta\zeta^3$ は計算面上の格子間隔 (任意に設定できる), t は時間, Δt は時間刻み幅とする. 補間オペレーター

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}^{n\zeta^1}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{\phi(\zeta^1 + n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) + \phi(\zeta^1 - n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t)}{2} \\
&\quad (28)
\end{aligned}$$

$\bar{\phi}^{n\zeta^2}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t), \bar{\phi}^{n\zeta^3}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t),$ も同様に定義.

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}^{nt}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{\phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t + n\Delta t/2) + \phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t - n\Delta t/2)}{2} \\
&\quad (29)
\end{aligned}$$

差分オペレーター

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_n \phi}{\delta_n \zeta^1}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{\phi(\zeta^1 + n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) - \phi(\zeta^1 - n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t)}{n\Delta\zeta^2} \\
&\quad (30)
\end{aligned}$$

$\frac{\delta_n \phi}{\delta_n \zeta^2}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t), \frac{\delta_n \phi}{\delta_n \zeta^3}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t),$ も同様に定義.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_n \phi}{\delta_n t}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{\phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t + n\Delta t/2) - \phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t - n\Delta t/2)}{n\Delta t} \\
&\quad (31)
\end{aligned}$$

積に関する特別な補間オペレーター

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi\psi}^{n\zeta^1}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{1}{2} \phi(\zeta^1 + n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) \cdot \psi(\zeta^1 - n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \psi(\zeta^1 + n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) \cdot \phi(\zeta^1 - n\Delta\zeta^1/2, \zeta^2, \zeta^3, t) \\
&\quad (32)
\end{aligned}$$

$\widetilde{\phi\psi}^{n\zeta^2}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t), \widetilde{\phi\psi}^{n\zeta^3}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t),$ も同様に定義.

これら補間および差分オペレーターについては, 以下の恒等式が成立する.

$$\frac{\delta_n \bar{\phi}^{m\zeta^i}}{\delta_n \zeta^j} = \frac{\overline{\delta_n \phi}^{m\zeta^i}}{\delta_n \zeta^j} \quad (33)$$

$$\frac{\delta_n \bar{\phi}^{mt}}{\delta_n \zeta^j} = \frac{\overline{\delta_n \phi}^{mt}}{\delta_n \zeta^j} \quad (34)$$

$$\frac{\delta_n \bar{\phi}^{m\zeta^i}}{\delta_n t} = \frac{\overline{\delta_n \phi}^{m\zeta^i}}{\delta_n t} \quad (35)$$

$$\frac{\delta_n \bar{\phi}^{mt}}{\delta_n t} = \frac{\overline{\delta_n \phi}^{mt}}{\delta_n t} \quad (36)$$

$$\psi \frac{\delta_n \bar{\phi}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} = \frac{\delta_n \psi \cdot \bar{\phi}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} - \phi \frac{\delta_n \psi}{\delta_n \zeta^j} \quad (37)$$

$$\phi \frac{\delta_n \psi \cdot \bar{\phi}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} = \frac{1}{2} \frac{\delta_n \psi \cdot \widetilde{\phi\phi}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} + \frac{1}{2} \phi \phi \frac{\delta_n \psi}{\delta_n \zeta^j} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \theta \frac{\delta_n \psi \cdot \bar{\phi}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} + \phi \frac{\delta_n \psi \cdot \bar{\theta}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} \\ = \frac{\delta_n \psi \cdot \bar{\theta}^{n\zeta^j}}{\delta_n \zeta^j} + \theta \phi \frac{\delta_n \psi}{\delta_n \zeta^j} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\bar{\phi}^{nt} \frac{\delta_n \phi}{\delta_n t} = \frac{1}{2} \frac{\delta_n \phi \phi}{\delta_n t} \quad (40)$$

$$\bar{\theta}^{nt} \frac{\delta_n \phi}{\delta_n t} + \bar{\phi}^{nt} \frac{\delta_n \theta}{\delta_n t} = \frac{\delta_n \theta \phi}{\delta_n t} \quad (41)$$

3.2 時間-空間2次精度のエネルギー保存形差分スキーム

本節では、連続の式および非粘性で外力なしの場合の運動方程式の離散化を、空間2次精度のスタガード格子を用いた場合について示す。連続の式は圧力点まわりに、運動方程式はそれぞれの速度成分の定義点上で離散化される。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] = 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right)^{1\zeta^i} \overline{U^{(i)}^{1\zeta^j}} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} U^{(j)}^{1\zeta^j} U^{(k)}^{1\zeta^k} \left(\begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right)} \right]^{1\zeta^i} \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

上式は運動方程式の時間進行法に陽解法を使用する場合の空間2次精度の差分スキームで、時間離散化による誤差を除けば、式(42)が満足される場合に運動エネルギー保存形差分スキームとなる。

時間進行法に陰解法が使用できる場合、運動方程式に対する時間-空間2次精度のエネルギー保存形差分スキームは次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 U^{(i)}}{\delta_1 t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} \overline{U^{(j)}^{1t*}} \right)^{1\zeta^i} \overline{U^{(i)}^{1t} \zeta^j} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} \overline{U^{(j)}^{1t*} \zeta^j} \overline{U^{(k)}^{1t} \zeta^k} \left(\begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right)} \right]^{1\zeta^i} \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 $\bar{\phi}^{1t*}$ は時間2次精度を維持する時間補間である。 $\bar{\phi}^{1t*}$ を

$$\bar{\phi}^{1t*}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) = \bar{\phi}^{1t}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) \quad (45)$$

としかつ式(42)が満足される場合には、式(44)は運動エネルギーを時間-空間的に完全に保存しかつ時間

の対称性も保持される。しかし、離散式は非線型のためであるので、時間ステップあたりの計算量は多くなる。一方、 $\bar{\phi}^{1t*}$ を

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^{1t*}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) &= \frac{3}{2} \phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t - \Delta t/2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t - 3\Delta t/2) \end{aligned} \quad (46)$$

とすれば時間2次精度を維持したままで離散式は線形化され、比較的経済的な計算が可能となる。式(42)が満足される場合に式(44)は運動エネルギーを時間-空間的に完全に保存する。

3.3 対流項差分の互換性と離散式のエネルギー保存特性

本節では、第2.2節で示した対流項の型の互換性とエネルギー保存特性が、離散式(44)でどのように満足されるかを説明する。式(44)の右辺第2および第3項は発散型の対流項の離散式 $(Div.-S2)^{(i)}$ で表現されているが、勾配型および混合型に対応した離散式 $(Adv.-S2)^{(i)}$ および $(Skew.-S2)^{(i)}$ も構成可能である。

$$\begin{aligned} (Div.-S2)^{(i)} \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} \overline{U^{(j)}^{1t*}} \right)^{1\zeta^i} \overline{U^{(i)}^{1t} \zeta^j} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} \overline{U^{(j)}^{1t*} \zeta^j} \overline{U^{(k)}^{1t} \zeta^k} \left(\begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right)} \right]^{1\zeta^i} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (Adv.-S2)^{(i)} \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} \overline{U^{(j)}^{1t*}} \right)^{1\zeta^i} \frac{\delta_1 \overline{U^{(i)}^{1t}}}{\delta_1 \zeta^j} \right]^{1\zeta^j} \\ + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} \overline{U^{(j)}^{1t*} \zeta^j} \overline{U^{(k)}^{1t} \zeta^k} \left(\begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right)} \right]^{1\zeta^i} \end{aligned} \quad (48)$$

$$(Skew.-S2)^{(i)} = \frac{1}{2} (Div.-S2)^{(i)} + \frac{1}{2} (Adv.-S2)^{(i)} \quad (49)$$

連続の式の離散式(42)を次式、

$$(Cont.-S2) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] (=0) \quad (50)$$

で表現すると、 $(Cont.-S2) = 0$ の場合に、対流項の離散式の互換性は、

$$\begin{aligned} (Div.-S2)^{(i)} &= (Adv.-S2)^{(i)} \\ &\quad + \overline{U^{(i)}^{1t}} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} (Cont.-S2)^{1t*}} \right]^{1\zeta^i} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} (Skew.-S2)^{(i)} &= (Div.-S2)^{(i)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \overline{U^{(i)}^{1t}} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} (Cont.-S2)^{1t*}} \right]^{1\zeta^i} \end{aligned} \quad (52)$$

$$= (Adv.-S2)^{(i)} + \frac{1}{2} \overline{U^{(i)}}^{1t} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overline{\sqrt{g} (Cont.-S2)^{1t*}} \right]^{1\zeta^i} \quad (53)$$

を通して満足される。

次に、離散式の運動エネルギー保存特性を議論するため、Ham *et al.* (2001) と同様にスタガード格子の空間2次精度差分に対応した次のエネルギー・ノルムを定義する。

$$K_{2nd} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \overline{\sqrt{g} U^{(i)} U^{(i)}}^{1\zeta^i} \quad (54)$$

このエネルギー・ノルムは、非定常項に関し次のように時間的に保存される。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \overline{\sqrt{g} U^{(i)}}^{1t} \left(\frac{\delta_1 U^{(i)}}{\delta_1 t} \right)^{1\zeta^i} = \frac{\delta_1 K_{2nd}}{\delta_1 t}$$

混合型の対流項の離散式 (*Skew.-S2*)⁽ⁱ⁾ に対して同様の操作を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \overline{\sqrt{g} U^{(i)}}^{1t} \overline{(Skew.-S2)^{(i)}}^{1\zeta^i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\overline{\left(\frac{\sqrt{g} U^{(j)}}{h_j} \right)^{1t*}}^{1\zeta^j} \frac{1}{2} \left(\overline{U^{(i)}}^{1t} \widetilde{\overline{U^{(i)}}^{1t}} \right)^{1\zeta^j} \right]^{1\zeta^i} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \overline{U^{(i)}}^{1t} \left[\overline{\sqrt{g} U^{(j)}}^{1t*} \frac{1}{\sqrt{g} U^{(k)}}^{1\zeta^k} \left(\frac{i}{k, j} \right) \right]^{1\zeta^i} \quad (55) \end{aligned}$$

上式の右辺第1項は空間離散化に関して運動エネルギーの局所保存形となっている。上式の右辺第2項の物理的クリストッフェル記号に関する項については、計算領域の境界で速度がゼロの場合あるいは周期的流れ場の場合に次の総和、

$$\begin{aligned} & \sum \frac{1}{\sqrt{g}} \overline{U^{(i)}}^{1t} \left[\overline{\sqrt{g} U^{(j)}}^{1t*} \frac{1}{\sqrt{g} U^{(k)}}^{1\zeta^k} \left(\frac{i}{k, j} \right) \right]^{1\zeta^i} \\ & \times (\sqrt{g} \Delta \zeta^1 \Delta \zeta^2 \Delta \zeta^3) \\ &= \sum \overline{U^{(i)}}^{1t} \frac{1}{\sqrt{g} U^{(j)}}^{1t*} \frac{1}{\sqrt{g} U^{(k)}}^{1\zeta^k} \left(\frac{i}{k, j} \right) \\ & \times (\sqrt{g} \Delta \zeta^1 \Delta \zeta^2 \Delta \zeta^3) = 0 \quad (56) \end{aligned}$$

がゼロとなり、運動エネルギーが大域的に保存される。圧力項の離散式 (*Pres.-S2*)⁽ⁱ⁾,

$$(Pres.-S2)^{(i)} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} \right),$$

の運動エネルギー保存特性は、

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \overline{\sqrt{g} U^{(i)}}^{1t} (Pres.-S2)^{(i)}^{1\zeta^i}$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^i} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_i} \overline{U^{(i)}}^{1t} \frac{1}{p}^{1\zeta^i} \right] - \frac{p}{\rho} \overline{(Cont.-S2)^{1t}} \quad (57)$$

で確認される。つまり、(*Cont.-S2*) = 0 が成立する場合に離散式 (*Pres.-S2*)⁽ⁱ⁾ は運動エネルギーに関して離散的な保存形となる。

4. 直角座標系の不等間隔スタガード格子に対する時間-空間完全保存形差分スキーム

直角座標系の不等間隔スタガード格子に対する時間-空間完全保存形2次精度差分スキームは、独立変数を

$$x_1 = x_1(\zeta^1), \quad x_2 = x_2(\zeta^2), \quad x_3 = x_3(\zeta^3),$$

スケール因子およびヤコビアンを

$$h_1 = \left| \frac{dx_1}{d\zeta^1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{dx_2}{d\zeta^2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{dx_3}{d\zeta^3} \right|,$$

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3,$$

とし、さらに前節の直交曲線座標系の不等間隔スタガード格子に対する差分スキームで物理的クリストッフェル記号をゼロとすれば得られる。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] = 0 \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1 U^{(i)}}{\delta_1 t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\overline{\left(\frac{\sqrt{g} U^{(j)}}{h_j} \right)^{1t*}}^{1\zeta^j} \frac{1}{U^{(i)}}^{1\zeta^i} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} \right) \quad (59) \end{aligned}$$

式 (58) が満足される場合、式 (59) は直角座標系において式 (54) で定義されるエネルギー・ノルム (ただし直角座標系に適用) を時間-空間的に局所的に保存する。式 (59) には発散型の対流項差分が用いられているが、式 (58) が満足される場合にこれと互換となる勾配型および混合型の対流項差分も構成可能である。式 (59) は Ham *et al.* (2001) による不等間隔スタガード格子差分をより一般的に記述したものに对应し、また時間離散化を除けば梶島 (1999) の不等間隔スタガード格子差分と等価なものである。

最後に、直角座標系の不等間隔スタガード格子に対する時間2次精度-空間4次精度の完全保存形差分スキームを示しておく。

$$\frac{9}{8} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_3}{\delta_3 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} U^{(j)} \right] = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\delta_1 U^{(i)}}{\delta_1 t} + \frac{9}{8} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\overline{\left(\frac{\sqrt{g} U^{(j)}}{h_j} \right)^{1t*}}^{4th \zeta^j} \frac{1}{U^{(i)}}^{1\zeta^i} \right]$$

$$-\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_3}{\delta_3 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g} U^{(j)1t*}}{h_j} \right)^{4th \zeta^i} \frac{1}{U^{(i)1t}} 3 \zeta^j \right] \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{9}{8} \frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} - \frac{1}{8} \frac{1}{h_i} \frac{\delta_3 p}{\delta_3 \zeta^i} \right) \quad (61)$$

ここで、 $\overline{\phi}^{4th \zeta^i}$ は空間 4 次精度の補間で、次式で定義される。

$$\overline{\phi}^{4th \zeta^i} = \frac{9}{8} \overline{\phi}^{1 \zeta^i} - \frac{1}{8} \overline{\phi}^{3 \zeta^i} \quad (62)$$

式 (61) は次のエネルギー・ノルムに関して保存形となる。

$$K_{4th} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \overline{\sqrt{g} U^{(i)} U^{(i)}}^{4th \zeta^i} \quad (63)$$

つまり、式 (61) の左辺第 2 および第 3 項の対流項の離散式はエネルギー・ノルムに関して局所保存形、右辺の圧力項は大域的保存形となる。式 (61) には発散型の対流項差分が用いられているが、式 (60) が満足される場合にこれと互換となる勾配型および混合型の対流項差分も構成可能である。

なお、一般曲線座標系の不等間隔スタガード格子に対するエネルギー保存形差分の構成、および直交曲線座標系の不等間隔スタガード格子に対するエネルギー保存形差分の空間高次精度化は別の機会に検討する。

5. まとめ

本研究では、まずテンソル解析を用いて流体運動の基礎方程式を不等間隔スタガード格子の差分解析に適した形に記述した。次に、直交曲線座標系における不等間隔スタガード格子の時間-空間 2 次精度のエネルギー保存形差分スキームを一般的に記述した。最後に、直角座標系における不等間隔スタガード格子について、時間-空間 2 次精度の完全保存形差分スキーム、および時間 2 次精度、空間 4 次精度の完全保存形差分スキームを構成した。

謝辞

本研究に関し日本原子力研究所計算科学技術ソフトウェア研究開発からの補助を受けている。ここに記して感謝の意を表す。

Appendix

第 2 節および第 3 節で展開した直交曲線座標系の不等間隔スタガード格子差分を実際に使用する際の便宜を図るため、具体例として円筒座標系の場合を取り上げ、独立変数、スケール因子、ヤコビアンおよび物理的クリストッフエル記号を示しておく。

円筒座標系の不等間隔格子差分に対しては、直交曲線座標の独立変数を $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\zeta^r, \zeta^\theta, \zeta^z)$ とする。ここで、 $(\zeta^r, \zeta^\theta, \zeta^z)$ は物理面上の円筒座標系の独立変数 (r, θ, z) のそれぞれの方角に対応した計算面上

の独立変数であり、これらには $r = r(\zeta^r)$, $\theta = \theta(\zeta^\theta)$, $z = z(\zeta^z)$ および $\zeta^r = \zeta^r(r)$, $\zeta^\theta = \zeta^\theta(\theta)$, $\zeta^z = \zeta^z(z)$ の 1 対 1 の対応関係がある。また、直角座標系の独立変数 (x_1, x_2, x_3) と円筒座標系の独立変数 (r, θ, z) は、 $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$ で結びつけられる。これらを用いると、スケール因子、ヤコビアンおよび物理的クリストッフエル記号は、

$$h_r = \frac{dr}{d\zeta^r}, \quad h_\theta = r \frac{d\theta}{d\zeta^\theta}, \quad h_z = \frac{dz}{d\zeta^z}, \\ \sqrt{g} = r \frac{dr}{d\zeta^r} \frac{d\theta}{d\zeta^\theta} \frac{dz}{d\zeta^z}, \\ \begin{pmatrix} \theta \\ r, \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r \\ \theta, \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \text{他の成分はゼロ}$$

で与えられる。速度成分は通常の円筒座標系での速度成分 $(U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}) = (u_r, u_\theta, u_z)$ で与えられる。

参考文献

- (1) Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Phys. Fluids, 8 (1965), pp.2182-2189.
- (2) Piacsek, S.A. and Williams, G.P., "Properties of Convection Difference Schemes" J. Comput. Phys., 6 (1970), pp.392-405.
- (3) 梶島岳夫, "対流項の差分形式とその保存性," 機論, 60-574, B (1994), pp2058-2063.
- (4) 森西洋平, "非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性," 機論, 62-604, B (1996), pp4090-4112.
- (5) Morinishi, Y., Lund, T.S., Vasilyev, O.V. and Moin, P., "Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow," J. Comput. Phys., 143 (1998), pp.90-124.
- (6) Vasilyev, O.V., "Higher Order Finite Difference Schemes on Non-uniform Meshes with Good Conservation Properties," J. Comput. Phys., 157 (2000), pp.746-761.
- (7) 梶島岳夫, "不等間隔格子に適合する対流項の差分法," 機論, 65-633, B (1999), pp1607-1612.
- (8) Ham, F., Lien, F.-S. and Strong, A.I., "A New Method for Direct Numerical Simulation that Discretely Conserves Mass, Momentum, and Kinetic Energy," in Proc. of TSFP-2, vol.II (2001), pp.365-370.
- (9) Demirdzic, I., Gosman, A.D., Issa, R.I. and Peric, M., "A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries," Computers & Fluids, 15-3 (1987), pp.251-273.
- (10) Aris, R., "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluids Mechanics," Dover Publications Inc. (1989).