

Helmholtz 表示要素を用いるエネルギー保存スキーム

Numerical Scheme for Energy Conservation Using Helmholtz Element

今村 純也, IMI 計算工学研究室 (理研研究嘱託),

〒351-0114 埼玉県和光市本町 31-9-803, E-mail:jimamura@ra2.so-net.ne.jp

棚橋 隆彦, 慶大理工, 〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:taka@mech.keio.ac.jp

Junya IMAMURA, IMI Computational eng.Labo., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN

Takahiko TANAHASHI, Keio University, Hiyoshi 3-14-1, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8552 JAPAN

The numerical model, in which primitive variable is used for basis function of the element, satisfies the continuity condition as weak solution. On the other hand, the model using Helmholtz element does as strong solution. The latter model is more accurate than the former one for the acceleration calculated by using spatial differential part F_{ij} in the Navier-Stokes equation ($U/t - F_{ij} = 0$). In this study, we applied C_1 -continuity Helmholtz element for the model, thereby expressed F_{ij}/t with spatial differentials, and then converted the high order part $U_i f(t) - F_{ij}/t$ of kinetic energy to equivalent non-isotropic dissipation term $_{i,j} S_{ij}^2$. We proposed a scheme for energy conservation and studied 2D cavity flow of $Re=50,0000$ numerically using high ordered exact terms up to $m=4$.

1. 目的

Helmholtz の定理により、非圧縮粘性流の流速はベクトルポテンシャルで表示される。したがって、基底関数をベクトルポテンシャルとする有限要素⁽¹⁾⁽²⁾では連続条件が強解として保証され、保存形と非保存形の式はミクロにも一致する。

この点から、要素内離散点で Navier-Stokes 方程式の空間微分項から求まる加速度の精度は、連続の式を弱解として満足させる要素より高いと考えられる。

さらに、Navier-Stokes 方程式の空間微分項群を時間微分し、かつ、それらに含まれる時間微分項をすべて空間微分で表わした加々速度の精度も同様と考えられる。

しかし、非線形項の存在によりこれら加速度等は空間的に高次となり、その分布を要素の次数で表現することはできない。そこで離散化解析ではこれを平均化して、運動量が保存されるよう表現 (有限体積法、ガレルキン法など) する。その場合、エネルギーは必ずしも保存されていない。

空間的に高次の流速の散逸エネルギーは低次のそれよりも一般に大きい。したがって、平均化前のエネルギー変化率を数値積分して保存し、次ステップの数値計算に反映させることは、3 保存則いずれにも何らかの歯止めが掛かるという意味で、有意義と考える。本研究では、これを渦粘性モデルとして構築するスキームを検討する。

以上の考え方は、スキーム自体は異なるものの、LES (Large Eddy Simulation) と同様である。そこで、ここでも低次の成分を GS (Grid Scale) 成分と呼び、高次の流れから GS 成分を控除した成分を SGS (Sub-Grid Scale) 成分と呼ぶものとする。

ただし、後述のように GS 成分の定義は LES と異なり、Navier-Stokes 方程式の空間微分項を GS 成分と呼ぶ。したがって、基底関数で表わされる流れを、厳密には異なるが、ここでは単に平均流と呼んで区別する。

なお、本稿では非圧縮を仮定し、2D で数値的な基礎検討を行う。

2. 方法

2.1 基礎方程式

物理量の代数記号はいずれも平均流を表すとし、 U_i は流速、 τ_{ij} は粘性応力、 P は圧力とし、密度は基準化して表して、連続の式は(1)式、運動方程式は(2)式とする。

$$\text{連続の式: } \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial U_i}{\partial t} = F_{ij} \quad (2)$$

ただし、空間微分項を F_{ij} にまとめ次式とする。

$$F_{ij} \equiv - \frac{\partial (U_i U_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} P)}{\partial x_j}$$

2.2 上流外挿値

記号説明を目的に、まず上流外挿値について述べる。

(2)式の左辺と右辺をそれぞれ用いて、時間ステップ n 断面の流速を a 点の周りでテーラー展開し(3)式に示す。

$$U_{i,a} + \Delta t \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)_a + \dots = U_{i,a} + \Delta t F_{ij,a} + \dots \quad (3)$$

(3)式の左辺は a 点の t 後の流速を表わし、右辺はこれに対応する上流点流速を表わす。(3)式左辺を $U_{i,a}^{n+1}$ 、右辺を $U_{i,a}^{n,ex}$ と記号して(4)式とし、その位置関係を Fig.1 に示す。

$$U_{i,a}^{n+1} = U_{i,a}^{n,ex} \quad (4)$$

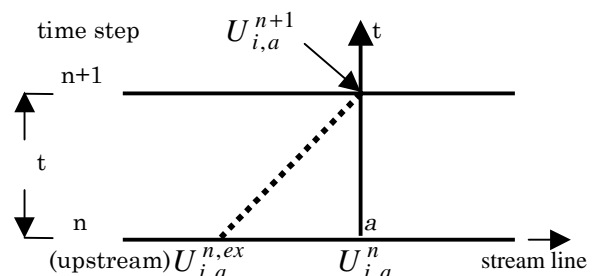


Fig.1 explicit values from point a

なお、(3)式右辺の高次項には(2)式を時間微分し、その右辺に含まれる加速度をすべて空間微分で表わして適用する。

2.3 有限要素

平均流には C_1 連続な双 3 次矩形要素を、圧力には C_0 連続な双 1 次矩形要素を適用する。

双 3 次要素は 2 D では隅点ノード k に次の 4 自由度の未知数ベクトルを有する。

$$\text{ノード未知数ベクトル: } \left\{ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\}_k$$

流速 U_i は(5)式のように Helmholtz 分解してベクトルポテンシャル ψ で表し、連続の式(1)を完全に満足させる。

$$\mathbf{U} = \text{curl } \psi \quad (5)$$

2.4 平均流速および圧力分布

平均流速は、高レイノルズ数流れへの適用を目的としていることから、無条件安定である完全陰解法を適用する。すなわち、(3)式に対応する $n+1$ 断面での a 点周りの外挿値を表わす(6)式による。

$$U_{i,a}^n = U_{i,a}^{n+1} - \Delta t F_{ij,a}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} \right)_a^{n+1} - \dots \quad (6)$$

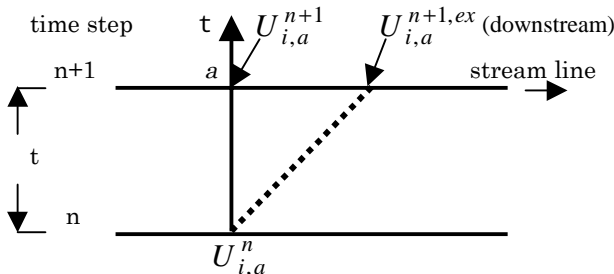


Fig.2 explicit values from point a at time step $n+1$

(6)式を精度高く解くには、一般的には、高次の項まで入れて反復計算する。しかし、高次項まで入れた反復計算は演算負荷が大きい。S G S 成分の捕捉状況が把握しづらい、などが欠点である。

そこで、(6)式右辺は 1 次の項まで採用し、高次項のエネルギーを等価な散逸率として捕捉して、非等方渦粘性係数を算出し、 U_i^{n+1} を未知数としてガレルキン法で解くものとする。これにより運動エネルギーも保存される。

ガレルキン式からは圧力勾配は消滅するので、(6)式右辺の圧力勾配は必要としない。すなわち、(7)式で表される。ただし、 μ は粘性係数、 $\mu_{t,ij}$ は非等方渦粘性係数、 S_{ij} は変形速度テンソル、 $\mu_{t,ij}$ は系を表わす。($\mu_{t,ij}$ は対称とする。)

$$\int_{\Omega} \delta U_i \cdot \left\{ \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \left(U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^{n+1} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \cdot (v + v_{t,ij}) S_{ij}^{n+1} d\Omega = 0 \quad (7)$$

ただし、後述の上流化および次節の $\mu_{t,ij}$ を求める式には圧力分布を必要とするので、予め求めておく必要がある。

また、等方性モデルは渦粘性係数を μ_t と記号する。

2.5 渦粘性係数

はじめに述べたように、(6)式の t に関する 1 次までの項を G S 成分と呼ぶ。したがって、2 次以上の項が S G S 成分であり、これを t で除して $H_{ij,a}^{n+1}$ と記号する。

$$H_{ij,a}^{n+1} \equiv + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} \right)_a - \dots \quad (8)$$

検査領域内で S G S 成分の運動エネルギー変化率と等価な散逸率は(9)式で表わされる。(A は検査領域)

$$\int_A (v_{t,ij} S_{ij}^2)^{n+1} dA = \int_A U_i^{n+1} H_{ij}^{n+1} dA \quad (9)$$

$\mu_{t,ij}$ を求める方法のひとつとして、要素内で線形変化するとして有限体積法で求めることが考えられる。ここでは演算負荷を最小限に抑えるため $\mu_{t,ij}$ を検査領域内一定とする。

(7)式と(9)式は連立させて反復計算する必要がある。(近似的には(9)式に時間ステップ n 断面の流速分布を適用。)

(9)式右辺の H_{ij}^{n+1} に高次項を適用する場合には、それに対応する P/t , $^2P/t^2$, ... を予め求めておく必要がある。計算は P を求める方法に準じ、 P の変化率を順次求めてゆく。

3. 数値計算技法

3.1 上流化および下流化

上流化は既提案³⁾の方法による。すなわち、上流値 U_i^{ex} を要素内積分した場合、当該要素の基底関数を上流側にはみ出して積分することになる。要素を空間に固定するオイラーモデルでは、基底関数は当該要素内でのみ適用すべきである。

したがって、上流要素に懸かる面積分は上流要素の基底関数を適用すべきである。

移流項を要素内積分することは、 V を要素辺垂直方向流速とすれば、近似的に要素辺 ds あたり $t V ds$ だけ上流要素にはみ出して積分することになる。よって、この面積分は上流要素の関数で置き換えて積分する必要がある。これは次式の要素辺一周積分項を加えることで達成される。

$$\text{上流化項} = + \Delta t \oint_S V U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} ds \quad (10)$$

S は要素辺一周であり、辺上の移流値を $t V ds$ 面積分下流要素から減じ、その分上流要素値を加えることとなる。一周積分することにより、加・減の符号は V に含まれて実行され、移流値の差が補正される。

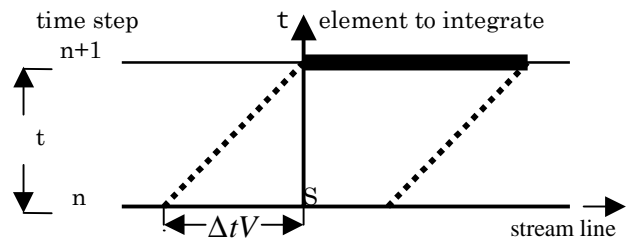


Fig.3 area to replace with value of upstream element

運動エネルギー式では拡散項を含めて移流する形式となる。そこで、本稿では(11)式を適用する。

$$\text{上流化項} = + \Delta t \oint_S V F_{ij} ds \quad (11)$$

その根拠は次のとおりである。すなわち、(7)式のガレルキン法は運動エネルギーの変分式であり、解いた結果のパラメータ値(ノード未知数)を各行に乗じても連立方程式は変わらないから、系全体(全行和)としてのエネルギーは保存されている。よって、 F_{ij} が移流する形式となっている。

(6)式における下流化の場合も同様にして適用する。また、

高次項を対象とする(9)式においても同様である。

3.2 等価線積分

有限要素法では要素間不連続量は線積分項として加算する。このため粘性項には発散定理を適用し、(7)式第2項のようにせん断力表現するのが一般的である。

(9)式の積分においては、 H_{ij}^{n+1} は不連続であるから移流項にも等価線積分項の導入が必要である。これは次のようにして達成される。

すなわち、連続体理論は無限回連続微分可能(無限級数)を前提としており、有限級数を適用する離散化解析では等価線積分項の導入は常に必要である。これを Fig.4 の有限体積法の例で示す。

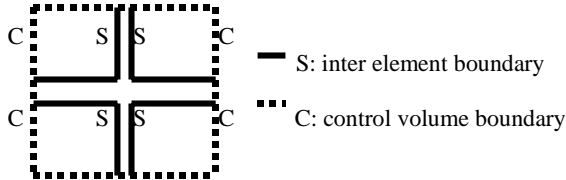


Fig.4 control volume and inter element boundary

Fig.4 の点線で囲まれた領域が検査領域、点線が検査面である。実線は検査領域中の要素間境界である。

有限体積法では方程式の検査領域積分を検査面一周積分することで、等価集中力を計算に取り込む。この方法では等価集中力は計算式に顕れないので、モデル化項の陰的表現と呼ぶ。

これを面積積分と要素間境界積分で表現することも可能である。その方法ではモデル化項が数式中に顕れるので、著者らは陽的表現と呼んで区別している。陽的表現では(11)式の上流化が同時に実行できる便利さがある。

さらに、陽的表現式の大きな特徴は非線形式に適用し易いことである。例えば、関数の3重積である $h \cdot g \cdot \partial f / \partial x_j$ 項の積分は、陽的表現式では(12)式となる。

$$\text{陽的表現の積分項} = \int_A hg \frac{\partial f}{\partial x_j} dA - \int_S hgf ds \quad (12)$$

(12)式の第2項がモデル化項であり、連続であれば隣接要素と相殺して消滅する。しかし、(3)式または(6)式で高次項まで省略することなく用いれば消滅することはない。

以上をまとめれば、「陽的表現式は、与えられた積分方程式にその部分積分項を符号逆転して加える」と説明できる。

ガレルキン法の陽的表現式は、 w を試行関数とすれば以上の応用として、 w を系全体、 S を要素辺一周として(13)式となる。

$$\int_{\Omega} whg \frac{\partial f}{\partial x_j} d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} whg \frac{\partial f}{\partial x_j} d\Omega - \int_S whgf ds \quad (13)$$

なお、(9)式ではA内で t_{ij} を一定と仮定した。したがって、検査領域境界Cでも集中せん断力を生じる。これは、(7)式に示した陰的表現によって取り込む方が簡易である。

3.3 加速度の連続条件について

F_i の発散はゼロでない点に留意が必要である。したがって、Helmholtz 表示によって連続条件が強解として保証されるのは流速のみで、本稿で言うG S成分の加速度項およびS G S成分の連続条件は弱解としてのみ満足される。

3.4 3Dへの拡張

流れ関数を用いる2Dでは必要ないが、ベクトルポテンシャルを用いる3DではCoulombのゲージを制約条件として解く必要がある。これはノード未知数がベクトルであるから、変分問題の制約条件として対応可能な見込みである。

4. 計算例による数値的検討と考察

4.1 計算条件

Re 数 = 1×10^4 および 5×10^4 の2Dキャビティフローを等方性モデルで数値計算した。要素数はいずれも不等分割 50×50 要素(壁面に沿って12列を1/152幅、その他を約1/30幅 $\times 26$ で分割)とし、時間ピッチは $t = 1/2000$ とした。

が双3次の要素では U_i は x_j 方向に3次補間可能である。そこで移動壁要素での移動速度は、隅点で $U_i = 0$ として垂直壁上端と一致させ、かつ $U_i / x_j = 0$ として連続条件も満足させて立ち上げている。よって、隅点で渦度 $= 0$ となり、いずれも条件設定の説明性が高い。

Re 数 = 5×10^4 の解析は、初期値を Re 数 = 1×10^4 の層流解 ($t = 900$ 状態⁽⁴⁾) とし、 Re 数のみ 5×10^4 に up し、提案モデルによって計算した。以下では、時間カウントはこの時点 $t = 0$ として表示する。計算は $t = 120$ まで進め、 $t = 100 \sim 120$ 間の結果を示す。(要旨集には $t = 40$ の中間結果を示す。)

Re 数 = 1×10^4 は、以上とは無関係に、静止状態から提案モデルによって計算した。

4.2 計算結果

ここには Re 数 = 5×10^4 の結果を示す。 Re 数 = 1×10^4 は十分な経過時間ではないものの)層流解とほとんど差がないので添付を省略する。

まず、流速プロファイルを Re 数 = 1×10^4 の層流解および Ghia らの結果⁽⁵⁾ とともに Fig. 5(a) に示す。

Re 数 = 5×10^4 では定常状態に至らず、常に変動すると予想される。そこで Fig. 5(a) には $t = 100 \sim 120$ の無次元時間20の平均を示す。これは主渦が2.5~3回転する時間である。

Fig. 5(b)~(d) には、それぞれ $t = 100, t = 110, t = 120$ の時間断面の流速プロファイルを、上記20平均との比較で示す。

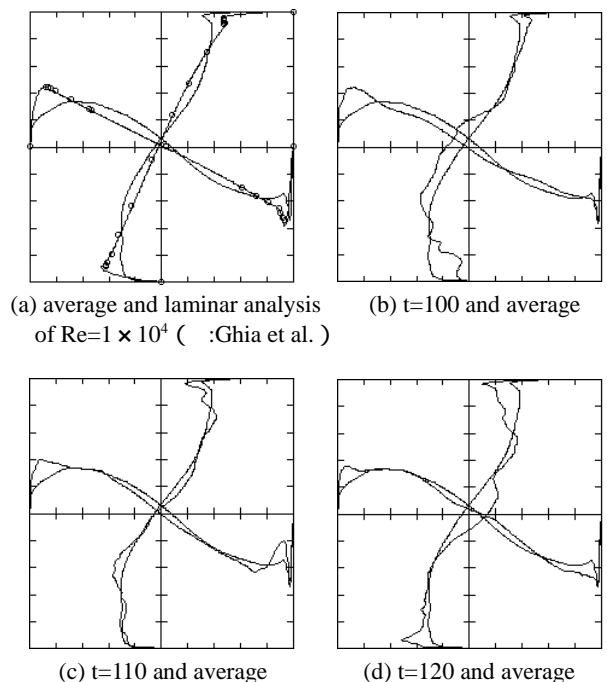


Fig. 5 profiles of U_i on geometrical center lines ($Re = 5 \times 10^4$) (in comparison with average between $t = 100 \sim 120$)

これらプロファイルに対応する流線図を Fig.6 に示す。前同様、Fig.6(a)には t=100~120 の 20 平均の分布を、Fig.6(b)~(d)には、それぞれ t=100, t=110, t=120 の時間断面を示す。

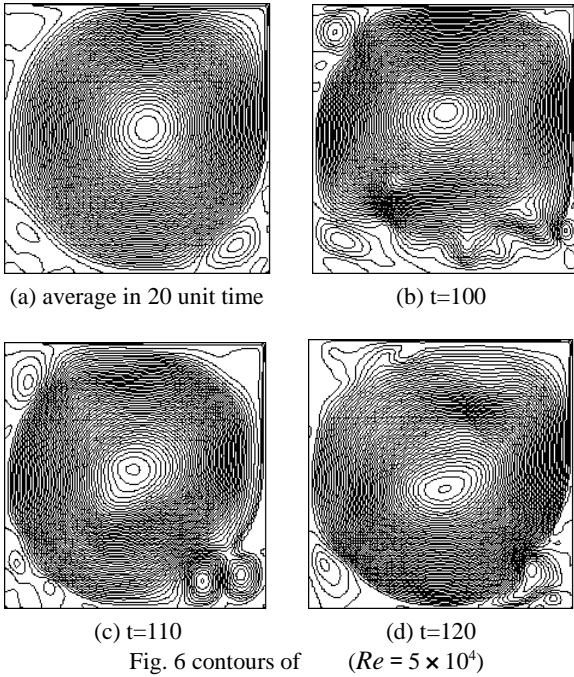


Fig. 6 contours of $(\tau + t)$ ($Re = 5 \times 10^4$)

$(\tau + t)$ の分布を Fig.7 に、要素のノード上にプロットして示す。(a), (b), (c)にそれぞれ t=100, 110, 120 の分布を、また(d)には t=120 での t の負の値のみ示す。

t のオーダーは t=120 で -20~2700 であり、大きな値は頂部をカットして示した。また、 t の値は格子に沿ってプロットしているが、オーダーは線の太さ程度である。

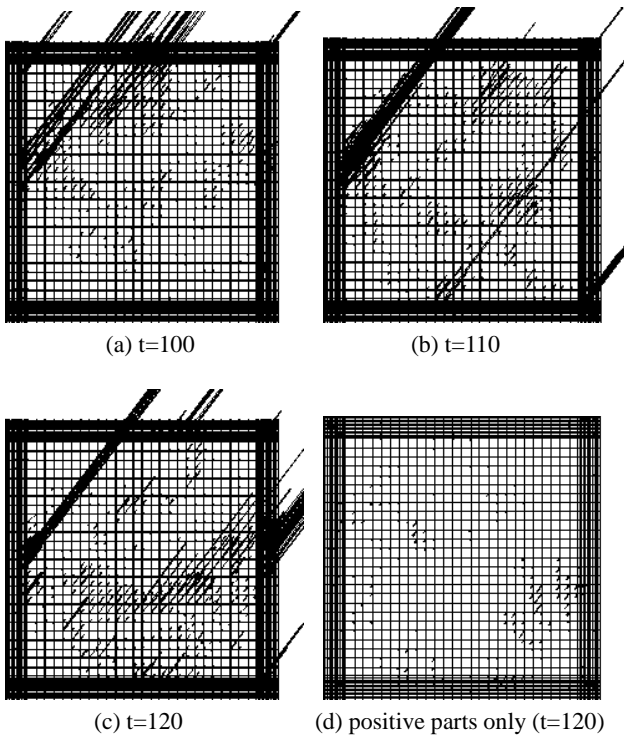


Fig. 7 Histogram of $(\tau + t)$ on node points

4.3 考 察

(1) S G S 成分の分布

Fig.7 は(9)式を有限体積として満足する弱解である。すなわち、 H_{ij} は要素内および要素間集中力の合計である。

Fig.8 にはそのうち $U_i H_{ij} / S^2_{ij}$ の要素内分布値 (積分前) を示す。ただし、 $S^2_{ij} < 1.0$ は $S^2_{ij} = 1.0$ として計算しプロットした。(a)は t=100 での分布であり、(b)にはそのうち負の部分のみ示す。(c)および(d)は同様に t=120 での分布を示す。

この図より t の変動はかなり大きく、S G S 成分のエネルギー変化率は高い周波数で、かつ正・負で分布していることが判る。しかし、要素間集中力も入れた平均では Fig.7 に見るように逆輸送は小さく、大部分は散逸する。

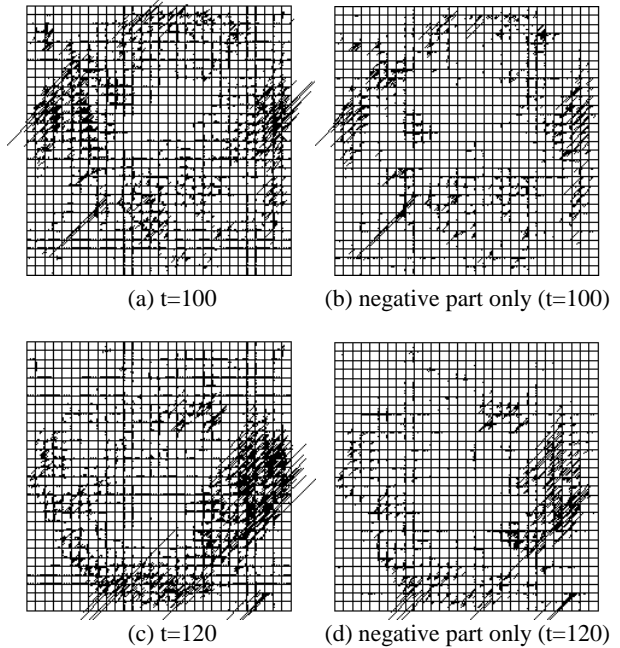


Fig. 8 distribution of H_{ij} / S^2_{ij} in elements ($Re = 5 \times 10^4$)

Fig. 8 は S^2_{ij} の最小を 1.0 としてプロットしたが、この足きりの値によって様相はかなり変わる。特に、針状の突出部の様相が変わることに留意する必要がある。

以上のほか、 k や t の分布もプロットは可能である。

(2) S G S 成分の推定

本稿では S G S 成分は時間 4 次の項まで数値計算して求めた。その流線方向を r とし、かつ移流項のみ (Hopf 方程式) について示せば(14)式となる。

$$\frac{\partial^m U}{\partial t^m} = (-1)^m \left\{ U^m \frac{\partial^m U}{\partial r^m} + \dots + m! U \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^m \right\} \quad (14)$$

(14)式右辺を用いてテーラー展開すれば、 t 後の第 1 項は流線接線方向の値であり、他はその拡れ補正值と言えよう。

最後の項は等比級数であり、かつ無限級数となる。その級数和は $|t \cdot U / r| < 1.0$ であれば収束する。

もし、(14)式全体の級数和が推定できれば乱流エネルギーの近似値が推定できることになる。そこで、 $U_i H_{ij}$ を等比級数と仮定して 4 次の項までを用いて収束値を推定することを考える。

比を t とし、2 次の項を用いて求めた $U_i H_{ij}$ を H_2 と記し、3 次の項まで用いて求めた $U_i H_{ij}$ を H_3 と記せば、そ

の比は + 1 となる。同様に、4 次の項からも は求まるが、両者が一致する保証はない。そこで次の方法を探る。

4 次の項 (級数第 3 項) まで用いて求めた $U_i H_{ij}$ を H_4 と記せば、級数和の公式より(15)式を得る。

$$\alpha^2 - \frac{H_4}{H_2}(\alpha - 1) - 1 = 0 \quad (15)$$

(15)式は 4 次までの級数和が合うような平均的な を求める式である。この によって無限級数和を推定する。すなわち、 $H_\infty = H_2 / (1 -)$ となる。さらに、5 次までの級数和によれば精度はより高くなる。

以上を 4 次までの級数和で数値計算した結果、大部分のノードで $| | < 1.0$ となる。しかし、幾つかのノード上では極端な値が顕れる。

これは $U_i H_{ij}$ が単純な等比級数でないことによると考えられる。例えば、 H_2 が非常に小さく、かつ H_3 が等差的に増大するケースでは、 は非常に大きな値となることから理解されよう。

これらへの対処方法として、有限級数である(14)式第 1 項は別途計算し、残りを等比級数と仮定するなど考えられる。しかし、その誤差把握の理論的根拠を確立しておく必要がある。

また既報告⁽⁶⁾⁽⁷⁾のように、本スキームはあくまでも大きなスケールの渦エネルギーを捕捉することに限定し、さらに高レイノルズ数の散逸エネルギーには乱流モデルを加えることが考えられる。

ここには $t=120$ について試算した の値を、参考資料として、ノード上にプロットし Fig.9 に示しておく。

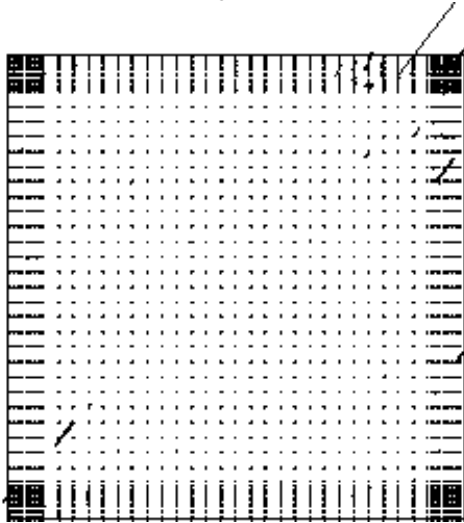


Fig.9 Histogram of on node points

(3) DNSとしての可能性

平均流輸送方程式はレイノルズ応力を加えることでエネルギーを保存する。(9)式右辺は、要素内の大スケールの渦エネルギーと要素間境界での集中力による仕事の和を検査領域平均として表わしたもので、レイノルズ応力項に対応する。かつ、有限要素法としてのモデル化以外の操作はしていない。したがって、高次化あるいは微細化することで厳密解に近づくはずである。したがって、レイノルズ応力の直接数値シミュレーションと言えよう。

演算負荷は高次の H_{ij} 項を求める要素内数値積分および連立方程式解法部分で大きい。数値積分は完全に並列処理可能であるから、解決の可能性はある。

陰解法であるから連立方程式にはポアソン方程式を含ん

でいる。その解法に並列処理の工夫が必要となる。

5 . まとめと今後の課題

Helmholtz 表示要素は連続条件を強解として保証し、要素内ミクロ部分での説明性が高いことから、要素内高次成分の運動エネルギーを求めて保存するスキームを提案した。

保存手法として、有限体積法を用いて運動エネルギー変化率を一旦等価な散逸エネルギーに換算し、渦粘性係数変換して陰解法連立方程式に反映させる方法を探った。

これによりエネルギー散逸過程の理解し易いモデルとなり、将来他のモデルとの比較検証も容易となっている。

渦粘性モデルは非等方性モデルとしたが、今回数値的検討では等方性モデルとし、Re 数 50,0000 の 2 D キャビティフローで安定的に作動することを確認した。

非等方性モデルの有効性検証は今後の課題である。また、3 D での検証および開空間での検証も課題として残っている。

なお、2 D では矩形要素を適用し、3 D では 6 面体要素を採用する予定であるが、任意境界形状への適合性が課題となる。その技法については稿を改めて報告する予定である。

参考文献

- (1) 今村, 棚橋, "時間軸 2 次精度流跡線による非圧縮流体解法" 計算工学講演会論文集, 第 4 巻第 1 号, (1999), pp. 263.
- (2) 今村, 棚橋, "三次精度流跡線による外挿解の平均化法とその残差エネルギー保存法" 第 13 回数値流体力学講演論文集,(1999)
- (3) 今村, "C₁連続な FEM モデルの非圧縮流体への適用" 第 11 回数値流体力学講演論文集,(1997), pp.567
- (4) 楨原, 今村, 棚橋, "2 次元正方キャビティ内流れの数値解に対する考察," 第 13 回数値流体力学講演論文集,(1998), pp. 471.
- (5) U.Ghia,K.N.Ghia and C.T.Shin "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics 48, (1982), pp387-411.
- (6) 今村, 棚橋, "Helmholtz 表示要素を用いたエネルギー保存スキームへの乱流モデルの適用" 計算工学講演会論文集, 第 6 巻第 1 号, (2001), pp. 245.
- (7) 今村, " Helmholtz 表示要素を用いたエネルギー保存スキームと乱流モデルの適用" 日本建築学会大会学術講演梗概集 (講演 No.41380),(2001),pp779-780