第 15 回数値流体力学シンポジウム
D10-2

単調性保存スキームⅠ－定常問題－

Monotonity Preserving Schemes Ⅰ
- Steady Problems -

酒井勝弘, 埼玉工業大学大学院, 〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, sakai@sit.ac.jp
木村　功, 埼玉工業大学大学院, 〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, sys00002@sit.ac.jp
渡部大志, 埼玉工業大学工学部, 〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, dw@sit.ac.jp
Katsuhiro Sakai, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293
Isao Kimura, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293
Daishi Watabe, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293

Our aims are to accomplish monotonicity preserving schemes without relying on numerical diffusions. For steady convection-diffusion equations, a Finite Variable Difference Method is proposed, in which convective Fluxes are evaluated at variable points dependent on a local ratio of the convective velocity to the diffusion coefficients such as the kinematic viscosity, and the convection term is estimated by using those locally optimized fluxes. Numerical experiments show good solutions.

1．概要

我々は対流項を有する輸送方程式に対し，数値粘性を導入しないで単調性を維持する計算スキームを目指している．その基本は，解くべき輸送方程式に対するモデル方程式の理論解の構造を，できる限り計算スキームに取り込むことである．

定常問題の数値的安定性に関するパタンカーの正係数条件は，単調性を保証するための十分条件である．一方特性多項式の特性根の正値条件は必要十分条件である(1)．一般に安定性と精度は trade-off の関係にあるので，単調性と同時に精度も向上したい今の場合，安定性に関する限界評価が必要であり，それ故過不足の無い安定性条件を議論できる特性根の正値性条件を用いて最適化を行う．

2．単調性保存条件

我々が対象とする輸送方程式は，拡散方程式や移流方程式であるが，これらの解 $f(t,x)$ は，次の単調性保存の性質を持っている．即ち「ある時刻 t'における解 $f(t',x)$ が空間座標 x の単調増加(減少)関数であれば，それ以後の時刻 t においても解 $f(t,x)$ は x の単調増加(減少)関数である」(2)．例えば(2.1)の移流方程式の場合，速度 u が定数の場合，解 $f(t,x)$ は(2.2)で表される．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{2.1}$$

$$f(t,x) = f(t',x-u(t-t')). \tag{2.2}$$

これは過去時刻の情報が速度 u で移流されてくることを表しており，上記の単調性保存の性質を持つことがわかる．この性質は，我々が対象としている輸送方程式の理論解の性質であるので，差分スキームに対してもこの単調性保存の性質を要請するのは極く自然な事である．

時間に関し単段階陽解法の差分スキームは一般に(2.3)で表されるが，これが単調性を保存するための必要十分条件は，差分係数 a の正値性条件(2.4)で与えられる．

$$f(t+\Delta t,x)=\sum_{\ell} a_{\ell}\, f(t,x+\ell\Delta x), \tag{2.3}$$

(2.3)から(2.5)を得るが，これより(2.4)が単調性保存の為の

$$a_{\ell}\ge 0. \tag{2.4}$$

$$f(t+\Delta t,x)-f(t+\Delta t,x')= \sum_{\ell} a_{\ell}\left(\ f(t,x+\ell\Delta x)-f(t,x'+\ell\Delta x)\ \right). \tag{2.5}$$

十分条件であること，即ち「全ての a_{ℓ} が正であれば $f(t+\Delta t,x)$ は単調である」ことが理解される．次に $f(t,x)=0$ (x<0), $f(t,x)=1$ (x≧0)の場合を考えると，(2.3)より(2.6)を，これより $x=j\Delta x$ と $x=(j-1)\Delta x$ における f の差をとって(2.7)を得る．

$$f(t+\Delta t,x)=\sum_{\ell\ge -(x/\Delta x)} a_{\ell}, \tag{2.6}$$

$$f(t+\Delta t,j\Delta x)-f(t+\Delta t,(j-1)\Delta x)=a_{-j}. \tag{2.7}$$

もし，a_{ℓ} に 1 つでも負が混じっていると $f(t,x)$ は単調でなくなる．この対偶を取ると，「$f(t,x)$ が単調であるならばすべての a_{ℓ} は正でなければならない」ことになる．以上により(2.4)は，差分スキーム(2.3)が単調性保存を持つための必要十分条件である事が解る．

3．定常問題の単調性条件

3．1　単調性に関する 2 つ（動的，静的）の側面

前節で議論したように，単調性保存は非定常問題の場合の概念であるが，定常問題の場合も，同様に定常輸送方程式の理論解の性質を維持することを差分スキームに要請する．例えば吸収項の無い定常移流・拡散方程式(3.1)は,u,ν が定数の時，(3.2)で表される一般解を有し，x に関し単調な性質を有しており，この性質を定常問題に対する差分スキームに対して要請しよう．

$$u\frac{df}{dx} = \boldsymbol{n}\frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad (3.1)$$

$$f(x) = C_1 e^{-(u/u)x} + C_2. \qquad (3.2)$$

ところで定常問題の数値解法として，擬似時間を用いて非定常問題として解き定常への収束解として解く方法（SOR 反復法等），直接定常方程式を解く方法（行列解法）がある．前者の場合，その疑似時間進行過程では有界性が確保されている限り（これは加速係数を０と 2 の間にとることで確保される），２節で言及した単調性が必ずしも保存されている必要は無く，最終定常解の空間に関する単調性が確保されていれば良い．事実 SOR 法で加速係数の取り方によってはオーバーシュート，アンダーシュートを繰り返しながら定常解に収束することは良くある事である．こうして定常問題の場合，時間進行過程における単調性（動的単調性）と最終定常解の空間に関する単調性（静的単調性）の 2 種の単調性があり [1]，定常問題の単調性は後者の静的単調性を議論すれば良い．

３．２　特性根の正値性条件 [1]

差分スキームの単調性は<u>差分方程式の正確な解</u>の振る舞いであるので,その議論の前に解の種類を明確にしておく．即ち，

[差分方程式の正確な解]＝[微分方程式の正確な解]＋[離散化誤差]　(3.3)

[数値解]＝[差分方程式の正確な解]＋[丸め誤差，収束誤差等の数値計算上の誤差]　(3.4)

定常の輸送方程式に対に対する差分式は一般に(3.5)で表され，係数が定数の場合その一般解即ち[差分方程式の正確な解]は(3.6)で与えられる（特性根が相異なる場合）．(3.6)で λ_ℓ は特性方程式(3.7)の根である．

$$\sum_{\ell=0}^{m+n} a_\ell f_{i-m+\ell} = 0, \qquad (3.5)$$

$$f_i = \sum_{\ell=1}^{m+n} \alpha_\ell (\lambda_\ell)^i, \qquad (3.6)$$

$$\sum_{\ell=0}^{m+n} a_\ell (\lambda)^\ell = 0. \qquad (3.7)$$

単調性は[差分方程式の正確な解]に対して言及されるものであるが，そこで(3.6)において特性根が１つでも負になると，[差分方程式の正確な解 f_i はメッシュ番号 i の偶奇に応じて振動し，単調性が破れてしまう．この対偶を取ると，「f_i が単調であるためには全ての特性根は正でなければならない」．一方(3.6)において「特性根が全て正であれば[差分方程式の正確な解 f_i]はメッシュ番号 i の偶奇に応じて振動する事はない．以上により定常問題の場合において，解がメッシュ毎に数値振動しない為の単調性の必要十分条件は，次の特性方程式における根の正値性条件で与えられる．

$$l_\ell \geq 0 \quad (\text{for } \ell = 1, 2, \sim, m+n). \qquad (3.8)$$

３．３　パタンカーの正係数条件

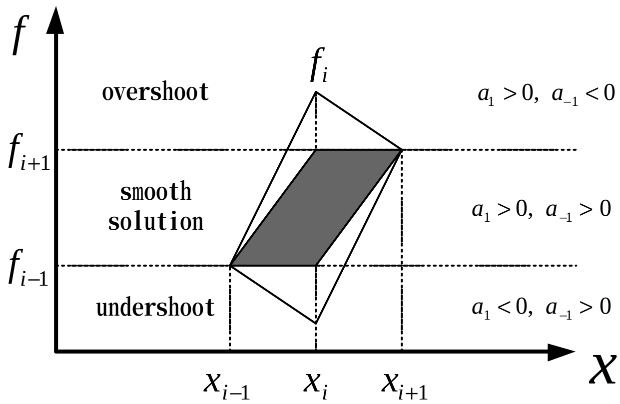
一方パタンカーは定常輸送方程式の差分式で，物理的現実性即ち輸送方程式の理論解の性質を保障するために差分スキームが従うべき 4 つのルールを与えている．そのうちの 1 つとして，(3.9)の差分式で，ある格子点のでの値が増加すれば隣接点での値は増加する（減少しない）という物理的要請から，その為の十分条件として(3.10)のルール（パタンカーの正係数条件）を与えている．

$$f(x) = \sum_\ell{}' a_\ell f(x + \ell\Delta x), \qquad (3.9)$$

$$a_\ell \geq 0. \qquad (3.10)$$

今，隣接ステンシルが２点の場合における(3.9)の振る舞いを，第 1 図に示す．即ち，

$$f_i = a_1 f_{i+1} + a_{-1} f_{i-1}, \quad (a_1 + a_{-1} = 1). \qquad (3.11)$$



第 1 図　[差分方程式の正確な解 f_i]の振る舞い.

３．４　単調性解析

移流・拡散方程式(3.1)の拡散項に対し二次中心差分を，移流項に対して，一次風上，二次中心，QUICK スキームを用いた場合について単調性を調べてみる．QUICK の場合の差分係数 a_ℓ は，輸送速度 u が正の場合に次式で与えられる．

$$a_{-2} = -Rm/(16 + 3Rm), \qquad (3.12a)$$

$$a_{-1} = (8 + 7Rm)/(16 + 3Rm), \qquad (3.12b)$$

$$a_1 \quad = (8-3Rm)/(16+3Rm), \tag{3.12c}$$
$$Rm \equiv u\Delta x / n. \tag{3.13}$$

第１表　有限差分方程式の差分係数.

移流項	a_{-2}	a_{-1}	a_1
一次風上差分	0	$\frac{1+Rm}{2+Rm}$	$\frac{1}{2+Rm}$
二次中心差分	0	$\frac{2+Rm}{4}$	$\frac{2-Rm}{4}$
QUICK	$-\frac{Rm}{16+3Rm}$	$\frac{8+7Rm}{16+3Rm}$	$\frac{8-3Rm}{16+3Rm}$

この時，特性方程式の根は(3.14)で与えられる.

$$l_1 = 1, \tag{3.14a}$$
$$l_2 = \frac{1+3Rm/4-\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}, \tag{3.14b}$$
$$l_3 = \frac{1+3Rm/4+\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}, \tag{3.14c}$$
$$\sum \equiv 1 + Rm + 3Rm^2/4. \tag{3.15}$$

セル Re 数 Rm は正であるので差分係数 a_{-2} は常に負であり，パタンカーの正係数条件(2.4)を満たす事は出来ない．一方特性根は $Rm < 8/3$ に対して正であり， $Rm < 8/3$ の小さい輸送速度に対しては単調性条件(3.8)を満たす．実際に(3.1)を数値計算すると， $Rm < 8/3$ の輸送速度に対しては単調な数値解を与える．即ちパタンカーの正係数の条件は単調性の為の十分条件であり，特性根の正値条件(3.8)がより正しい単調性条件を与える.

第２表　特性根および安定性条件.

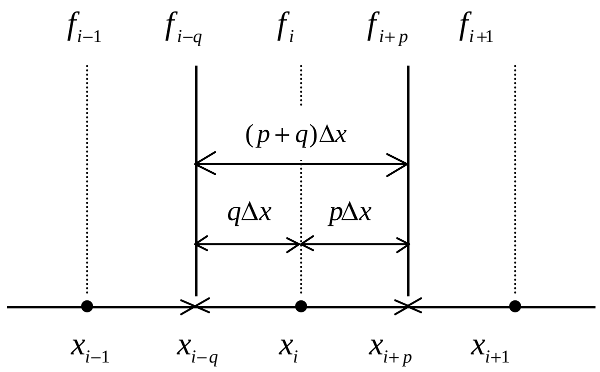
移流項	l_1	l_2	l_3	安定性条件
一次風上差分	1	$1+Rn$		any Rm
二次中心差分	1	$\frac{2+Rm}{2-Rm}$		Rm< 2
QUICK	1	$\frac{1+3Rm/4+\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}$	$\frac{1+3Rm/4-\sqrt{\Sigma}}{2(1-3Rm/8)}$	Rm< 8/3

４．有限可変差分法

４．１　移流項の離散化

数値流束を評価する位置を可変にする２つのパラメータ(p, q）を導入し，任意の局所セル Re数に対し，特性根が正になるような（p，q）の範囲を決定し，しかる後に精度がベストになるような p，q を決定する.

有限可変差分法における計算格子を第３図に示す.



第３図　FVDM における計算グリッド.

(1)対象とする輸送方程式

パラメータ（p, q)の最適値を求める際に，対象とするモデル輸送方程式として，次の定常移流拡散方程式を対象とする.

$$u\frac{df}{dx} = n\frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{4.1}$$

u ：輸送速度，n ：拡散係数.

以下では， $u > 0$ を仮定する.

(2)移流項の離散化（有限可変差分法）

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \left(\frac{f_{i+p} - f_{i-q}}{(p+q)\Delta x}\right). \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} p \text{ の範囲：} 0 < p < 1 \\ q \text{ の範囲：} 0 < q < 1 \end{cases}$$

$p = q = 1/2$ の時，従来のＦDM(有限差分法)に一致する.

数値流束

$$f_{i+p} = a_p f_{i+1} + b_p f_i + c_p f_{i-1}, \tag{4.3a}$$
$$f_{i-q} = a_q f_i + b_q f_{i-1} + c_q f_{i-2}. \tag{4.3b}$$

(3)差分係数 a_p, b_p, c_p, a_q, b_q, c_q の計算

$f(x)$ を次の 2 次関数で近似する.

$$f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

すなわち,

$$\left.\begin{aligned} f_{i+p} &= c_1 x^2{}_{i+p} + c_2 x_{i+p} + c_3, \\ f_{i+1} &= c_1 x^2{}_{i+1} + c_2 x_{i+1} + c_3, \\ f_i &= c_1 x^2{}_i + c_2 x_i + c_3, \\ f_{i-1} &= c_1 x^2{}_{i-1} + c_2 x_{i-1} + c_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

(4.3a)式と(4.4)式より,

(4.3a)の左辺$= f_{i+p} = c_1 x^2{}_{i+p} + c_2 x_{i+p} + c_3$,

$$\begin{aligned} \text{(4.3a)の右辺} &= a_p f_{i+1} + b_p f_i + c_p f_{i-1} \\ &= a_p (c_1 x^2{}_{i+1} + c_2 x_{i+1} + c_3) \\ &\quad + b_p (c_1 x^2{}_i + c_2 x_i + c_3) \\ &\quad + c_p (c_1 x^2{}_{i-1} + c_2 x_{i-1} + c_3). \end{aligned}$$

上式を係数c_1, c_2, c_3でまとめると次式を得る.

$$\begin{aligned} & c_1 (x^2{}_{i+p} - a_p x^2{}_{i+1} - b_p x^2{}_i - c_p x^2{}_{i-1}) \\ & + c_2 (x_{i+p} - a_p x_{i+1} - b_p x_i - c_p x_{i-1}) \\ & + c_3 (1 - a_p - b_p - c_p) = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5)式が任意の係数c_1, c_2, c_3に関して, 恒等的に成立するという要請からc_1, c_2, c_3の各係数にかかる項を0とおいた式から次の行列方程式を得る.

$$\begin{pmatrix} x^2{}_{i+1} & x^2{}_i & x^2{}_{i-1} \\ x_{i+1} & x_i & x_{i-1} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2{}_{i+p} \\ x_{i+p} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6a}$$

x_{i-q}も同様に計算を行う.

$$\begin{pmatrix} x^2{}_i & x^2{}_{i-1} & x^2{}_{i-2} \\ x_i & x_{i-1} & x_{i-2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_q \\ b_q \\ c_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2{}_{i-q} \\ x_{i-q} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6b}$$

(4.6a), (4.6b)式を解いて, 差分係数a_p, b_p, c_p, a_q, b_q, c_qを得る. 等間隔格子の場合, 次のようになる.

$$a_p = \frac{p^2 + p}{2}, \; b_p = 1 - p^2, \; c_p = \frac{p^2 - p}{2}, \tag{4.7a}$$

$$a_q = \frac{q^2 - 3q + 2}{2}, \; b_q = 2q - q^2, \; c_q = \frac{q^2 - q}{2}. \tag{4.7b}$$

(4)差分方程式

移流項に(4.2)式を用い, 拡散項に二次中心差分を用いて(4.1)式を離散化すると, 次式を得る.

$$u\left(\frac{f_{i+p} - f_{i-q}}{(p+q)\Delta x} \right) = \boldsymbol{n} \left(\frac{f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \right). \tag{4.8}$$

$Rm \equiv \dfrac{u}{n} Dx$とおくと, (4.8)式は次式となる.

$$A f_{i+1} + B f_i + C f_{i-1} + D f_{i-2} = 0, \tag{4.9}$$

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv (p+q) - a_p Rm, \\ B &\equiv -\{(b_p - a_q) Rm + 2(p+q)\}, \\ C &\equiv (p+q) - (c_p - b_q) Rm, \\ D &\equiv c_q Rm. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

4．2　安定性解析

(1)特性方程式

有限差分方程式(4.9)の正確な解は, 次式で得られる.

$$f_i = \boldsymbol{a}_1 (\boldsymbol{l}_1)^i + \boldsymbol{a}_2 (\boldsymbol{l}_2)^i + \boldsymbol{a}_3 (\boldsymbol{l}_3)^i. \tag{4.11}$$

i :空間メッシュ番号　$(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$

ここでl_1, l_2, l_3は, 次の特性方程式の根である.

$$A l^3 + B l^2 + C l + D = 0. \tag{4.12}$$

(4.12)式は次のように因数分解できる.

$$(l - 1)\{A l^2 + (A+B) l + (A+B+C)\} = 0. \tag{4.13}$$

これより,

$$\left\{\begin{aligned} l_1 &= 1, \\ l_2 &= \frac{-(A+B) + \sqrt{(A+B)^2 - 4AD}}{2A}, \\ l_3 &= \frac{-(A+B) - \sqrt{(A+B)^2 - 4AD}}{2A}. \end{aligned}\right.$$

l_2, l_3のA, B, Dに(4.10)式を代入し, まとめると,

$$\left\{\begin{aligned} l_2 &= \frac{\left\{(p+q) - \left(\dfrac{p^2 + q^2 - p - 3q}{2} \right) Rm \right\} + \sqrt{w}}{2(p+q) - (p^2 + p) Rm}, \\ l_3 &= \frac{\left\{(p+q) - \left(\dfrac{p^2 + q^2 - p - 3q}{2} \right) Rm \right\} - \sqrt{w}}{2(p+q) - (p^2 + p) Rm}. \end{aligned}\right. \tag{4.14}$$

上式で

$$w=(p+q)^2+\left(\frac{p^4+q^4-2p^3-6q^3-2p^2q^2}{4}\right)Rm^2$$
$$+\left(\frac{p^2+9q^2-2p^2q-6pq^2+10pq}{4}\right)Rm^2$$
$$-(p^3-q^3-pq^2+p^2q-p^2-q^2-2pq)Rm.$$

(2)安定性条件

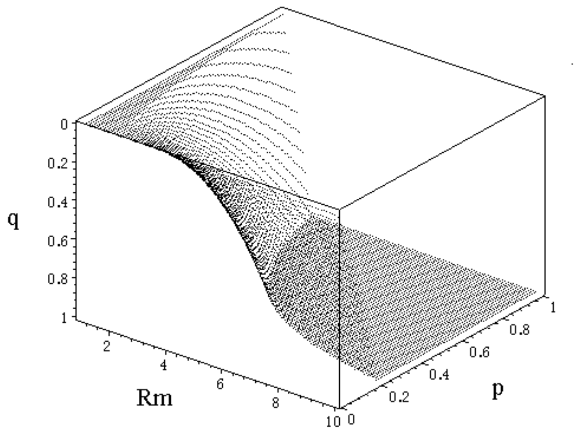
(4.11)式で特性根 l_1，l_2，l_3の一つでも負になると解 f_i はメッシュ番号 i の偶奇に応じて振動することになる．即ち，差分方程式(4.9)の解が振動しないための条件は，次式となる．

$$l_1 \geq 0 \quad , \quad l_2 \geq 0 \quad , \quad l_3 \geq 0. \tag{4.15}$$

(3)安定領域

いかなる Rm に対しても，(4.15)式が成り立つような $p,\ q$ の許容範囲を決める．その結果を第４図に示す．境界領域の下側が安定領域である．

Rm を大きくしていくと p は0に近づき，q は1に近づく．これは(4.3a)，(4.3b)式より，輸送速度が大きくなると風上側のウエイトを大きくする方が安定であることに対応している．



第４図　安定領域.

4．3　$p,\ q$ の最適値の決定

(4.1)式の解析解： $f=c_1e^{Rx}+c_2$ を，差分方程式(4.9)に代入し，(4.10)式を用いると次式を得る．

$$c_1Rm(a_pe^{Rx_{i+1}}+b_pe^{Rx_i}+c_pe^{Rx_{i-1}}-a_qe^{Rx_i}-b_qe^{Rx_{i-1}}-c_qe^{Rx_{i-2}})$$
$$-c_1(pe^{Rx_{i+1}}-2pe^{Rx_i}+pe^{Rx_{i-1}}+qe^{Rx_{i+1}}-2qe^{Rx_i}+qe^{Rx_{i-1}})$$
$$+c_2Rm(a_p+b_p+c_p-a_q-b_q-c_q)=0. \tag{4.16}$$

差分スキームの適合性の条件，又は(4.6a)，(4.6b)式の 3 行目の式より，

$$a_p+b_p+c_p=a_q+b_q+c_q.$$

故に，(4.16)式から次式を得る．

$$c_1Rm(a_pe^{Rx_{i+1}}+b_pe^{Rx_i}+c_pe^{Rx_{i-1}}-a_qe^{Rx_i}-b_qe^{Rx_{i-1}}-c_qe^{Rx_{i-2}})$$
$$-c_1(pe^{Rx_{i+1}}-2pe^{Rx_i}+pe^{Rx_{i-1}}+qe^{Rx_{i+1}}-2qe^{Rx_i}+qe^{Rx_{i-1}})=0.$$

これより，全体を $e^{Rx_{i+1}}$ で割りまとめると

$$c_1\{Rm(a_p+b_pe^{-Rm}+c_pe^{-2Rm}-a_qe^{-Rm}-b_qe^{-2Rm}-c_qe^{-3Rm})$$
$$-(p-2pe^{-Rm}+pe^{-2Rm}+q-2qe^{-Rm}+qe^{-2Rm})\}=0.$$

$X=e^{-Rm}$ とおき，上式が任意の c_1 に対して恒等的に成立する為に

$$Rm(a_p+b_pX+c_pX^2-a_qX-b_qX^2-c_qX^3)$$
$$-(p-2pX+pX^2+q-2qX+qX^2)=0. \tag{4.17}$$

(4.17)式は次のように因数分解できる．

$$(X-1)\left[-\frac{1}{2}Rm(q^2-q)X^2+\left\{\frac{1}{2}Rm(p^2+q^2-p-3q)-(p+q)\right\}X\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{1}{2}Rm(p^2+p)-(p+q)\right\}\right]=0.$$

これより，

$$\begin{cases} X_1=1, & (4.18a) \\ X_2=\dfrac{-h+\sqrt{h^2-4xV}}{2x}, & (4.18b) \\ X_3=\dfrac{-h-\sqrt{h^2-4xV}}{2x}. & (4.18c) \end{cases}$$

ここで，

$$x=-\frac{1}{2}Rm(q^2-q), \tag{4.19}$$

$$h=\frac{1}{2}Rm(p^2+q^2-p-3q)-(p+q), \tag{4.20}$$

$$V=-\frac{1}{2}Rm(p^2+p)+(p+q). \tag{4.21}$$

$X=e^{-Rm}$ で， Rmは任意であるので， $X=1$は棄却される．(4.18b)，(4.18c)式より次式を得る．

$$2xe^{-Rm} = -h \pm \sqrt{h^2 - 4xV}\,.$$

これより次式を得る．

$$h = -(xe^{-Rm} + Ve^{Rm})\,.$$

この式に(4.19)，(4.20)，(4.21)式を代入して，

$$p = \frac{\frac{1}{2}Rm(1+e^{Rm}) + (1-e^{Rm}) - \sqrt{\Phi}}{Rm(1-e^{Rm})}, \qquad (4.22)$$

$$\Phi = \frac{1}{4}\left\{(e^{Rm}+1)Rm - 2(e^{Rm}-1)\right\}^2 - Rm^2 qe^{-Rm}\left\{-q(e^{Rm}-1)^2 + (e^{Rm}-1)(3e^{Rm}-1)\right\} + 2Rmq(e^{Rm}-1)^2.$$

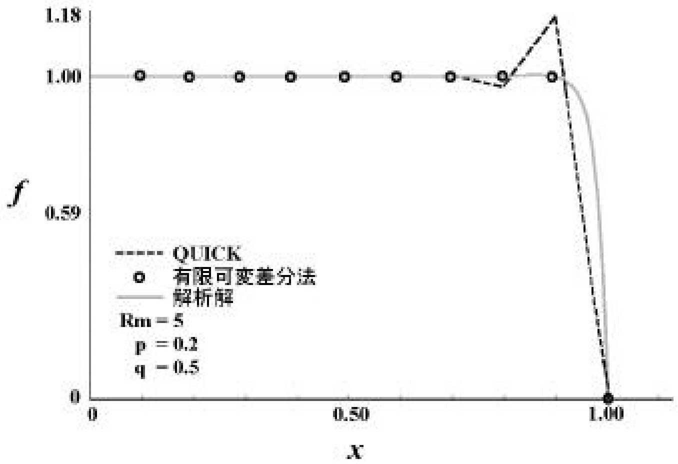
上式から最適な p, q の関係式が得られる．

5．　数値実験

移流拡散方程式(4.1)をデリクレ型境界条件の下で解き，解析解又は参照解と比較する．

5.1　一様速度分布

$q=0.5$，$Rm=5$ を(4.22)式に代入した結果，最適値 $p=0.2277$ が得られた．一様速度分布の場合に，この最適値に基づく有限可変差分法の結果と，ＱＵＩＣＫ，解析解の比較を第４図に示す．なお，ＱＵＩＣＫスキームの p, q の値は共に 1/2 である．ＱＵＩＣＫスキームの解は数値振動しているのに対し，本スキームの解は良好な解を示している．



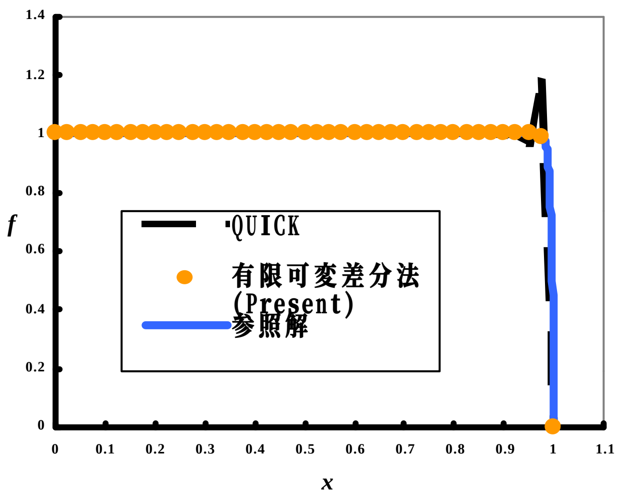
第４図　解の比較．

5.2　非一様速度分布

速度分布が一様でない場合，その空間分布を(5.1)で与える．この非一様速度分布の場合，解析解が得られないので，計算メッシュ数Nを大きく 1000 にとり，２次中心差分式で計算した数値解を，比較のための参照解として使用した．

$$R(x) = \frac{u(x)}{n} = -a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + b \qquad (5.1)$$

係数 a=10，b=200 の場合に，メッシュ数N=41 の粗メッシュで，有限可変差分法，QUICK 法による結果と参照解の比較を第５図に示す．有限可変差分法の結果は，単調性を維持しかつ参照解と良く一致している．



第５図　解の比較（非一様速度分布）．

6．結論

数値実験の結果，有限可変差分スキームは，定常移流拡散方程式に対して，いかなる輸送速度（一様，非一様いずれの場合も），いかなる拡散係数に対しても，数値振動を発生することなく良好な数値解が得られた．

参考文献

（１）　酒井勝弘，日本原子力学会誌，34 巻，6 号，(1992)，pp.544

（２）　矢島，野木，“ 発展方程式の数値解析 ”，岩波書店 (1977)，p.50