第 15 回数値流体力学シンポジウム
D10-4

単調性保存スキームⅢ－非定常非線形問題－

Monotonity Preserving Schemes Ⅲ
- Unsteady & Nonlinear problems -

木村　功，埼玉工業大学大学院，〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, sys00002@sit.ac.hp
酒井勝弘，埼玉工業大学大学院，〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, sakai@sit.ac.jp
渡部大志，埼玉工業大学工学部，〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690, dw@sit.ac.jp
Tchavdar Marinov，埼玉工業大学，〒369-0293 埼玉県大里郡岡部町大字普済寺 1690
Isao Kimura, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293
Katsuhiro Sakai, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293
Daishi Watabe, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293
Tchavdar Marinov, Saitama Institute of Technology ,1690 Fusaiji , Okabe , Saitama 369-0293

A two-dimensional Cole-Hopf transformation has been investigated. By making use of this Cole-Hopf transformation, an analytical solution of initial value problems to two-dimensional advection-diffusion equations is obtained. This solution possesses a suitable form for us to construct a numerical algorithm explicit with respect to time. Based on the solution, we construct a numerical scheme for nonlinear advection-diffusion equations. Numerical experiments show good solutions.

1．緒言

我々は対流項を有する輸送方程式に対し，数値粘性を導入しない第１原理的方法で，単調性を維持する計算スキームを目指している．その基本は，解くべき輸送方程式に対するモデル方程式の理論解の構造をできる限り計算スキームに取り込むことである．

モデル方程式として本研究では非線形移流拡散方程式を選び，その初期値問題に対して，Cole-Hopf変換を適用し線形化し，その時間発展部分に対し連続空間変数のスペクトル法を適用して，モデル方程式の理論解を導出する．この解に基づき，非線形移流拡散方程式に対し数値粘性を導入しない新しい計算スキームを構築する．

2．１次元非線形移流拡散方程式

次の１次元非線形移流拡散方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

ここで，u は輸送速度，t は時間変数，x は空間変数，ν は拡散係数である．上式の u を次のように置く．

$$u=\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad \phi=\phi(t,x). \tag{2}$$

(2)式を(1)式に代入すると次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2-\nu\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right\}=0.$$

よって，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2-\nu\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=\alpha(t). \tag{3}$$

通常，$\alpha(t)=0$ として扱われているが，ここでは一般性を失うことなく任意の $\alpha(t)$ に対して定式化を行う．φを以下のように置く．

$$\phi=\phi(t,x)=F\{\theta(t,x)\}. \tag{4}$$

(4)式を(3)式に代入すると次式が得られる．

$$F'\theta_t+\frac{1}{2}(F'\theta_x)^2=\nu(F''\theta_x{}^2+F'\theta_{xx})+\alpha(t). \tag{5}$$

(5)式を次のように２つの方程式に分離する．

$$\frac{1}{2}(F'\theta_x)^2=\nu F''\theta_x{}^2, \tag{6.a}$$

$$F'\theta_t=\nu F'\theta_{xx}+\alpha(t). \tag{6.b}$$

(6.a)式より，

$$\{F'(\theta)\}^2=2\nu F''(\theta).$$

従って，

$$F(\theta)=-2\nu\log(\theta-\beta)+\gamma. \tag{7}$$

(2)，(7)式より，

$$u=\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{dF}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=-2\nu\frac{\partial\theta/\partial x}{\theta-\beta}. \tag{8}$$

ここで，$\Theta\equiv\theta-\beta$ と置くと，次の１次元 Cole-Hopf 変換式が得られる．

$$u=-2n\frac{\partial\Theta/\partial x}{\Theta}. \tag{9}$$

一方，(6.b)式より次の熱伝導型方程式が得られる．

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=n\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2n}a(t)\Theta. \tag{10}$$

上式は，$a(t)$が t に依存する意味で非線形であるが，Θに関しては線形化されている．次に文献(1)のスペクトル法を用いて，Θの一般解を求める．

まず，Θを連続フーリエ級数で次のように展開する．

$$\Theta(t,x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(t)\exp\left(i\frac{2pkx}{L}\right). \tag{11}$$

但し，$L\equiv b-a$ である．(10)，(11)式より，以下の式が満たされればよいことがわかる．

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+\left\{n\left(\frac{2pk}{L}\right)^2+\frac{1}{2n}a(t)\right\}C_k(t)=0. \tag{12}$$

上の常微分方程式より，次の解が得られる．

$$C_k(t)=C_k(t')\exp\left[-\int_{t'}^{t}\left\{n\left(\frac{2pk}{L}\right)^2+\frac{1}{2n}a(t)\right\}dt\right]. \tag{13}$$

$C_k(t')$は，Θの直交性より次式のようになる．

$$C_k(t')=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_a^b\Theta(t',x')\exp\left(-\frac{i2pkx'}{L}\right)dx'. \tag{14}$$

(13)，(14)式を(11)式に代入すると次式が得られる．

$$\Theta(t,x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Theta(t',x')\cdot$$
$$\exp\left\{-\left(\frac{2pk}{L}\right)^2 m-a_m+\frac{i2pk(x-x')}{L}\right\}. \tag{15}$$

但し，$m\equiv\int_{t'}^{t}n\,dt$，$a_m\equiv\frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\frac{a(t)}{n}dt$.

ここで，次の数学公式[2]を導入する．

$$\frac{\sqrt{p}}{\Gamma}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{p}{\Gamma}\right)^2k^2\right]\cos\left(\frac{2pzk}{\Gamma}\right)\right\}$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(z+m\Gamma)^2\right\}. \tag{16}$$

上式において，$\Gamma\equiv\frac{L}{2\sqrt{m}}$，$z\equiv\frac{x-x'}{2\sqrt{m}}$ とすれば，次式が得られる．

$$\Theta(t,x)=\frac{\exp(-a_m)}{\sqrt{4pm}}\int_a^b\Theta(t',x')\cdot$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL)^2}{4m}\right\}dx'. \tag{17}$$

一方，(9)式より，

$$udx=-2nd(\log\Theta),$$
$$\int_a^{x'}u(t',x'')dx''=-2n\left[\log\Theta(t',x'')\right]_a^{x'}.$$

よって，

$$\Theta(t',x')=\Theta(t',a)\exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'')dx''\right].$$

上式を(17)式に代入すると次式が得られる．

$$\Theta(t,x)=\frac{\Theta(t',a)}{\sqrt{4pm}}\exp(-a_m)\int_a^b\exp\left\{-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'')dx''\right\}$$
$$\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL)^2}{4m}\right\}dx'. \tag{18}$$

(18)式の両辺を x で偏微分すると次式を得る．

$$\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}=-\frac{\Theta(t',a)}{\sqrt{4pm}}\exp(-a_m)\cdot$$
$$\int_a^b\exp\left\{-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'')dx''\right\}\cdot$$
$$\left(\frac{x-x'+kL}{2m}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL)^2}{4m}\right\}dx'. \tag{19}$$

(9)，(18)，(19)式より，(1)式の解$u(t,x)$が次式で得られる．

$$u(t,x)=$$
$$n\frac{\int_a^b\sum_{k=\infty}^{\infty}\left(\frac{x-x'+kL}{m}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'')dx''-\frac{(x-x'+kL)^2}{4m}\right\}dx'}{\int_a^b\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'')dx''-\frac{(x-x'+kL)^2}{4m}\right\}dx'}. \tag{20}$$

上式は，時刻 t'の解を用いて，新時刻 t の解を陽的に計算する式となっていて，数値計算アルゴリズムの構成上，都合の良い式となっている．上式の空間積分に対し，シンプソンの公式を用いて離散化すると，時間に関し，完全陽解法の

計算スキームが得られる．

2．2　数値実験

ここでは，初期 t=0 に於いて，原点 x=0 にショックウエーブがある１次元非線形移流拡散方程式に対し，計算スキームを用いて計算した結果を Fig.1，Fig.2 に示す．ここで，メッシュレイノルズ数は $Rm \equiv v_0 \Delta x / n$，クーラン数は $C \equiv v_0 \Delta t / \Delta x$，$v_0$ は初期の最大速度である．

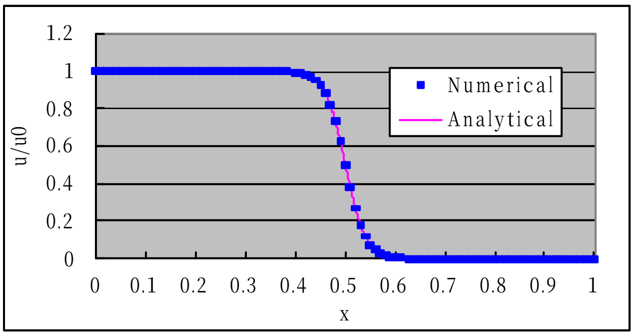

Fig.1 Comparison of solutions in 1-D problems (Rm=0.1, C=0.1, t=1000Δt).

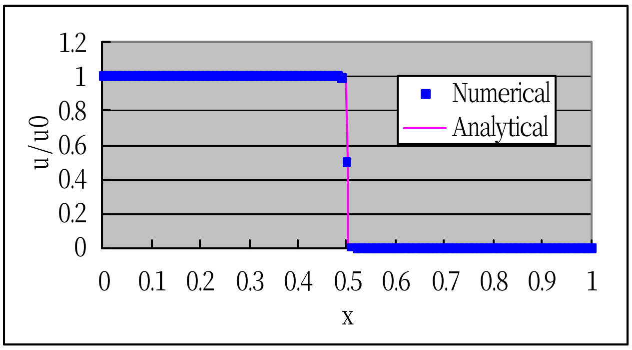

Fig. 2 Comparison of solutions in 1-D problems (Rm=10.0, C=0.1, t=1000Δt).

3．２次元非線形移流拡散方程式

3．1　２次元 Cole-Hopf 変換

以下の２次元非線形移流拡散方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{21.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = n\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{21.b}$$

ここで，u，v は輸送速度，t は時間変数，x，y は空間変数，ν は拡散係数である． 上式の u，v をスカラーポテンシャル φ を用いて次のように置く．

$$u = \frac{\partial f}{\partial x},\ v = \frac{\partial f}{\partial y},\ f = f(t,x,y). \tag{22}$$

(22)式を(21.a)式に代入すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = n\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right\} = 0.$$

従って，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = a_1(t,y). \tag{23.a}$$

同様に，(22)式を(21.b)式に代入すると次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = n\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right\} = 0.$$

よって，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = a_2(t,x). \tag{23.b}$$

(23.a)式の左辺と，(23.b)式の左辺は同じ式であるので，各々の右辺が任意の x，y に関して等しくなるためには，$a_1 = a_2 = a(t)$でなければならない．ここで，φ を次のように置く．

$$f = f(t,x,y) = F\{q(t,x,y)\}. \tag{24}$$

(23)，(24)式より，

$$F'q_t + \frac{1}{2}F'^2 q_x{}^2 + \frac{1}{2}F'^2 q_y{}^2 = n(F''q_x{}^2 + F'q_{xx} + F''q_y{}^2 + F'q_{yy}) + a(t). \tag{25}$$

上式を以下の２つの方程式に分割する．

$$\frac{1}{2}F'^2 q_x{}^2 + \frac{1}{2}F'^2 q_y{}^2 = n(F''q_x{}^2 + F''q_y{}^2), \tag{26.a}$$

$$F'q_t = n(F'q_{xx} + F'q_{yy}) + a(t). \tag{26.b}$$

(26.a)式より，

$$\{F'(q)\}^2 = 2nF''(q)$$

従って，

$$F(q) = -2n\log(q-b) + g\,. \tag{27}$$

(22)，(27)式より，

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{dq}\frac{\partial q}{\partial x} = -2n\frac{\partial q/\partial x}{q-b}\,, \tag{28.a}$$

$$v = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{dq}\frac{\partial q}{\partial y} = -2n\frac{\partial q/\partial y}{q-b}\,. \tag{28.b}$$

ここで，$\Theta \equiv q-b$ と置くと，次の２次元 Cole-Hopf 変換式が得られる．

$$u = -2n\frac{\partial\Theta/\partial x}{\Theta}\,, \tag{29.a}$$

$$v = -2n\frac{\partial\Theta/\partial y}{\Theta}\,. \tag{29.b}$$

一方，(26.b)式より次の熱伝導型方程式が得られる．

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = n\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{2n}a(t)\Theta \tag{30}$$

上式のΘを，文献(1)のスペクトル法で解く．まず，Θを連続フーリエ級数で次のように展開する．

$$\Theta(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}\sqrt{L_y}}\cdot$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{k,l}(t)\exp\left(i\frac{2pkx}{L_x}\right)\exp\left(i\frac{2ply}{L_y}\right). \tag{31}$$

但し，$L_x \equiv b-a$，$L_y \equiv d-c$ である．(30)，(31)式より，以下の式が満たされればよいことがわかる．

$$\frac{dC_{k,l}(t)}{dt} + C_{k,l}(t)\left[n\left\{\left(\frac{2pk}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2pl}{L_y}\right)^2\right\} + \frac{1}{2n}a(t)\right] = 0\,. \tag{32}$$

この常微分方程式より，次の解が得られる．

$$C_{k,l}(t) = C_{k,l}(t')\cdot$$

$$\exp\left(-\int_{t'}^{t}\left[n\left\{\left(\frac{2pk}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2pl}{L_y}\right)^2\right\} + \frac{1}{2n}a(t)\right]dt\right). \tag{33}$$

$C_{k,l}(t')$ は，Θの直交性より，次式のようになる．

$$C_{k,l}(t') = \frac{1}{\sqrt{L_x}\sqrt{L_y}}\int_a^b\int_c^d \Theta(t',x',y')\cdot$$

$$\exp\left(-i\frac{2pkx'}{L_x}\right)\exp\left(-i\frac{2ply'}{L_y}\right)dx'dy'\,. \tag{34}$$

(33)，(34)式を(31)式に代入すると次式が得られる．

$$\Theta(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}\sqrt{L_y}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Theta(t',x',y')$$

$$\cdot\exp\left[-\left\{\left(\frac{2pk}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2pl}{L_y}\right)^2\right\}m - a_m\right]$$

$$\cdot\exp\left(i\frac{2pkx}{L_x}\right)\exp\left(i\frac{2ply}{L_y}\right). \tag{35}$$

但し，$m = \int_{t'}^{t} n\,dt$ ，$a_m = \frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\frac{a(t)}{n}dt$.

ここで，(35)式に対し，１次元の場合と同様に，数学公式(16)を適用すると次式が得られる．

$$\Theta(t,x,y) = \frac{\exp(-a_m)}{\sqrt{4pm}\sqrt{4pm}}\int_a^b\int_c^d \Theta(t',x',y')\cdot$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} - \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}dx'dy'\,. \tag{36}$$

$f = \log\Theta$ と置いたときのΦに関する全微分は次式で与えられる．

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\,. \tag{37}$$

(29.a)，(29.b)式より，次の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{u}{2n}\,, \tag{38.a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{v}{2n}\,. \tag{38.b}$$

(38.a)式より，

$$\Phi(t',x',y') = -\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y')}{2n}dx + \Phi(t',a,y')\,. \tag{39.a}$$

上式の両辺を y'で偏微分すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial\Phi(t',x',y')}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial y'}\left\{\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y')}{2n}dx''\right\} + \frac{\partial\Phi(t',a,y')}{\partial y'}$$

$$= -\frac{v(t',x',y')}{2n}. \qquad (39.b)$$

上式より，

$$\frac{\partial\Phi(t',a,y')}{\partial y'} = -\frac{v(t',x',y')}{2n} + \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y')}{2n}dx''\right\}$$

よって，

$$\Phi(t',a,y') = \Phi(t',a,c) - \int_c^{y'}\frac{v(t',x',y'')}{2n}dy''$$

$$+\int_c^{y'}\frac{\partial}{\partial y''}\left\{\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y'')}{2n}dx''\right\}dy''. \qquad (39.c)$$

上式を(39.a)式に代入すると，次式が得られる．

$$\Phi(t',x',y') = -\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y')}{2n}dx'' - \int_c^{y'}\frac{v(t',x',y'')}{2n}dy''$$

$$+\int_c^{y'}\frac{\partial}{\partial y''}\left\{\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y'')}{2n}dx''\right\}dy'' + \Phi(t',a,c). \qquad (40)$$

$f = \log\Theta$ より，

$$\Theta(t',x',y') = \exp\left[-\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y')}{2n}dx'' - \int_c^{y'}\frac{v(t',x',y'')}{2n}dy''\right.$$

$$\left.+\int_c^{y'}\frac{\partial}{\partial y''}\left\{\int_a^{x'}\frac{u(t',x'',y'')}{2n}dx''\right\}dy''\right]\Theta(t',a,c). \qquad (41)$$

(41)式を(37)式に代入すると，次式が得られる．

$$\Theta(t,x,y) = \frac{\Theta(t',a,c)}{\sqrt{4pm}\sqrt{4pm}}\cdot\exp(-a_m)\cdot$$

$$\int_a^b\int_c^d \exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy''\right]\cdot$$

$$A\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} - \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx'. \qquad (42)$$

但し，
$$A \equiv \exp\left[\frac{1}{4n}\left\{\int_c^{y'}\left(\frac{\partial}{\partial y''}\int_a^{x'}u(t',x'',y'')dx''\right)dy''\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_a^{x'}\left(\frac{\partial}{\partial x''}\int_c^{y'}v(t',x'',y'')dy''\right)dx''\right\}\right].$$

(42)式の両辺を x で偏微分すると次式が得られる．

$$\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial x} = \frac{-\Theta(t',a,c)}{\sqrt{4pm}\sqrt{4pm}}\cdot\exp(-a_m)\cdot$$

$$\int_a^b\int_c^d \exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy''\right]\cdot$$

$$A\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-x'+kL_x}{2m}\right)\left[\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} - \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx' \qquad (43)$$

同様に，(42)式の両辺を y で偏微分すると次式が得られる．

$$\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial y} = \frac{-\Theta(t',a,c)}{\sqrt{4pm}\sqrt{4pm}}\cdot\exp(-a_m)\cdot$$

$$\int_a^b\int_c^d \exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy''\right]\cdot$$

$$A\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{y-y'+lL_y}{2m}\right)\left[\exp\left\{-\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} - \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx' \qquad (44)$$

(42)，(43)，(44)式を(28.a)，(28.b)式に代入すると，解である輸送速度 u，v が次式のように求められる．

$$u(t,x,y) = n\frac{\int_a^b\int_c^d A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-x'+kL_x}{m}\right)\exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy'' - \left\{\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} + \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx'}{\int_a^b\int_c^d A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}v(t',x',y'')dy'' - \left\{\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} + \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx'},$$

(45.a)

$$v(t,x,y) = n\frac{\int_a^b\int_c^d A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{y-y'+lL_y}{m}\right)\exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy'' - \left\{\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} + \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx'}{\int_a^b\int_c^d A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2n}\int_a^{x'}u(t',x'',y')dx'' - \frac{1}{2n}\int_c^{y'}v(t',x',y'')dy'' - \left\{\frac{(x-x'+kL_x)^2}{4m} + \frac{(y-y'+lL_y)^2}{4m}\right\}\right]dy'dx'}.$$

(45.b)

但し, $$A \equiv \exp\left[\frac{1}{4n}\left\{\int_c^{y'}\left(\frac{\partial}{\partial y''}\int_a^{x'} u(t',x'',y'')dx''\right)dy'' + \int_a^{x'}\left(\frac{\partial}{\partial x''}\int_c^{y'} v(t',x'',y'')dy''\right)dx''\right\}\right].$$

上式は，時刻 t'の解を用いて，新時刻 t の解を陽的に計算する式となっている．上式の空間積分に対し，シンプソンの公式を用いて離散化することにより，時間に関し完全陽解法の計算スキームが得られる．

3．2　数値実験

計算体系を $x=[-1,1]$，$y=[-1,1]$，拡散係数を$n=10^{-3}$，時間幅を$\Delta t=10^{-4}$，初期値を Fig.3（第１象限に速度ベクトル（$V_x=1$，$V_y=1$）を与え，時刻$t=2000\Delta t$において，空間メッシュ数を 101×101 および 201×201 の場合に，(45)式に基づく新しい計算スキームを用いて計算したときの直線 $y=x$ 上の結果を Fig.4 に示す．両メッシュで計算結果に違いは殆ど見られない．これは本スキームが理論解に基づきスキームを構成しているためと考えられる．

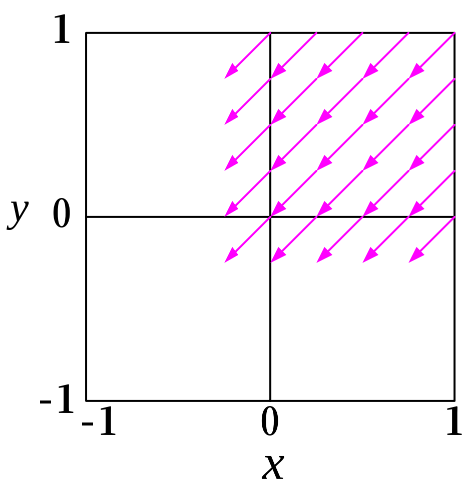

Fig.3　Initial　distribution.

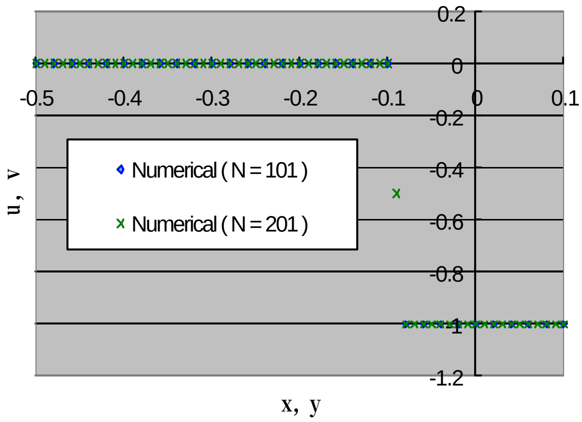

Fig. 4 Comparison of solutions with the present scheme in 2-D problems.

この２次元問題の場合解析解が得られてないので，計算メッシュ数を 1001×1001 にとり，時間項をクランク・ニコルソンスキーム，移流・拡散項を二次精度中心差分法で離散化した数値解を，比較のための参照解として使用する．201×201 体系で，(45)式に基づく新しい計算スキームによる数値解と，参照解との比較を Fig.5 に示す．

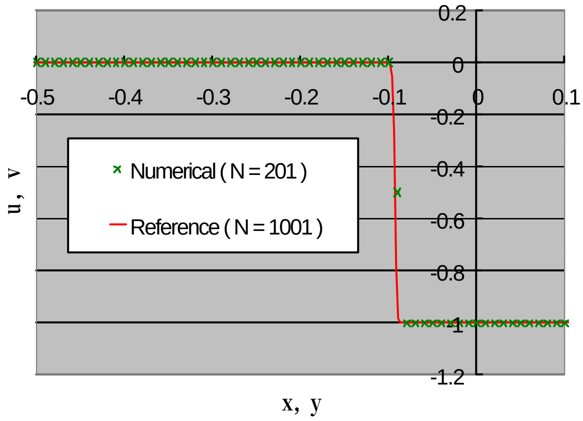

Fig. 5 Comparison of solutions in 2-D problems.

4．結言

１次元及び２次元 Cole-Hopf 変換について検討を行った．非線形移流拡散方程式に対し，Cole-Hopf 変換を適用して線形化した．そしてスペクトル法を用いて１次，２次元非線形移流拡散方程式に対する一般解を導出した．数値実験の結果，１次元問題については，解析解と良く一致する解が得られた．２次元問題についても，メッシュ数を多くとった参照解と良く一致する解が得られた．

最後に数値的安定性に関する議論を付記する．このスキームは先の論文Ⅰ，Ⅱの場合と異なり非線形のスキームであり，論文Ⅰ，Ⅱで議論した単調性条件の理論が適用できない．しかしながらこのスキームⅢも，スキームⅠ，Ⅱと同様に理論解の構造を取り込むように構成しているので，数値計算上の不安定性（数値振動）は発生しないことが期待できる．事実拡散係数が小さく勾配の大きい輸送現象に対する数値実験の結果，数値振動のないスムースな数値解を得ている．

参考文献

(1) K.Sakai(1999), A Nonoscillatory Numerical Scheme Based on A General Solution of 2-D Unsteady Advection-Diffusion Equations, J.Comput. and Applied Math, Vol.108, pp.145-156

(2) 森口繁一他(1960)，数学公式Ⅱ，岩波書店