ウェーブレット選点法による非圧縮性流体解析

Incompressible Turbulent Flow Simulation by Dynamically Adaptive Wavelet Collocation Method

辻 拓也, 九大総理工, 福岡県春日市春日公園 6-1, E-mail: tsuji@aees.kyushu-u.ac.jp
横峯 健彦, 九大総理工, 福岡県春日市春日公園 6-1, E-mail: yokomine@ence.kyushu-u.ac.jp
清水 昭比古, 九大総理工, 福岡県春日市春日公園 6-1, E-mail: shimizu@ence.kyushu-u.ac.jp
Takuya Tsuji, Kyushu University, 6-1 Kasuga-koen, Kasuga, Fukuoka, 816-8580 JAPAN
Takehiko Yokomine, Kyushu University, 6-1 Kasuga-koen, Kasuga, Fukuoka, 816-8580 JAPAN
Akihiko Shimizu, Kyushu University, 6-1 Kasuga-koen, Kasuga, Fukuoka, 816-8580 JAPAN

Dimension of simulation is restricted by the main memory size of computer. Grid adaption can bring simulation to the upper next level. This is not exception for incompressible flow, but this is highly difficult. We have tested the scheme which utilize wavelets based on MRA(Multi Resolution Analysis) as a eddy scale detector. As a first attempt, we have tested its adaption ability, and it was well adapted to existing structures.

１.はじめに

流体シミュレーションの規模はコンピュータ性能，特にメモリ容量によって著しく制限されている．解こうとする問題の解像したい最大スケールが大きくなるに従い，もしくは解像したい最少スケールが小さくなるに従い，必要メモリ量は増加する.使用可能なメモリ容量が，問題の解像できる最大/最小スケール比，つまり計算の規模を決定するのである．コンピュータ性能の急速な進歩に伴い，以前にもまして流体シミュレーションにも大規模化，高精度化が求められるようになっている．これらの要求に対応するには，使用メモリ量を削減する何らかの方策が必要である．

流れ中に存在すると考えられる全スケール成分が，解析領域全域に常に存在しているのであろうか．各スケール成分が時空的に偏在するということを認めれば，ある時間，ある位置に存在する渦スケール成分に対応する解像度を選択的に与えることにより，計算に必要な総メモリ数は抑えられるはずである．時空間選択的に解像度を操作する手法としては，従来から AMR(Adaptive Mesh Refinement)法などがあった．しかしこれらの方法では，流れ場中の物理量の勾配が急峻となった箇所にグリッド点を増やすといったように，どのスケール成分に対して解像度を操作しているかが不明瞭であった．そのため衝撃波を伴う圧縮性流れなど，物理量の変化が急峻で局所的であるような場合には有効に働くが，剪断乱流に代表されるスケール分布が全域的であり，衝撃波ほど物理量の変化が急峻でない問題には適用しにくい．

近年多重解像度解析，その中でも特にウェーブレット解析が注目を集めている [1]．その特徴は位置-スケールに立脚した情報を抽出できることにあり，フーリエ変換では得られない情報を得ることができる．流体研究も例外ではなく，さまざまな適応例が報告されている[2][3]が，これらは主にポストプロセス的な適用である．このウェーブレット解析をシミュレーションの各タイムステップにおいて適用すれば，そのタイムステップにおける位置-スケールに基づいた情報が抽出できるはずである．つまり，存在する渦スケール成分の検出器としてウェーブレット解析を用いることにより，合理的に重要な成分のみを選択することができ，これに対応する解像度を与えてやればよいことになる．ウェーブレット選点法[4][5][6]はこのような考えに基づいており，プリポスト的にウェーブレットを使用する方法であると言うことができる．本研究では，内挿ウェーブレットを用い，特に AMR 法が適用しにくい乱流，混相流などに代表される非圧縮流れでの動的適合グリッド型解析手法の開発を目指す．本稿では第一段階として，まずウェーブレットによる適合性能の検証を一，二次元において行う．

2. 計算手法

2.1 内挿ウェーブレット

Holmström [6] に従い内挿ウェーブレット [7] を用いる．内挿ウェーブレットは Eq.(1)の 2 進グリッド上で定義される．第 3 レベルまでの 2 進グリッドの例を Fig.1 に示す．通常ウェーブレットはスケーリング関数を定義し，これが張る空間の補空間として定義される [8]．しかし内挿ウェーブレットでは，評価対象点での下解像度レベルからの内挿値とその点での実際の値の差が，ウェーブレット係数として定義される．関数 f のレベル j，位置 k におけウェーブレット係数 $d_{j,k}$ は Eq.(2)のように表される．ここで P( )は下レベルからの内挿を表す．ここで内挿のオーダーを p で表す．いま p =4 つまり 4 点を内挿に使用すると，Fig.2 のようになる．これを各解像度レベルに再帰的に繰り返すことにより，各グリッド点は Fig.3 に示すようにウェーブレット係数と 1 対１の関係となる．

$$V_j = \left\{ x_{j,k} \in \mathbf{R} : x_{j,k} = 2^{-j}k,\ k \in \mathbf{Z} \right\},\quad j \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

$$d_{j,k} = f_{j+1,2k+1} - \mathrm{P}\left(f_{j+1,k+1} \right) \qquad (2)$$

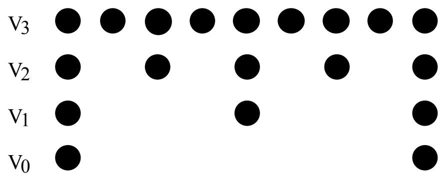


Fig.1 Dyadic grids up to third level

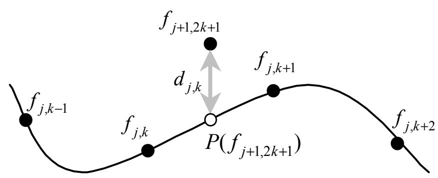


Fig.2 Wavelet coefficient by interpolating wavelets

2.2 内挿ウェーブレットによるグリッド点の選択

各タイムステップにおいてまずウェーブレット係数を算出する．ウェーブレット係数が小さい成分は，解析領域全体への影響が少ないと考えることが出来るため，閾値εを導入し，これらの成分を除外する．ウェーブレット係数とグリッド点は 1 対１の関係にあり，除外された成分に対応するグリッド点は計算から除外される．つまりウェーブレット係数に閾値を設定することによってグリッド点の間引きを行うのである．これによって必要な総メモリ数を削減する．

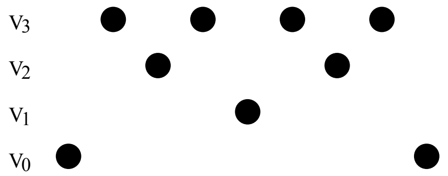


Fig.3 One-to-one relation between wavelet coefficients and grid points up to third level

物理量の移流を正確に捉えるためには，閾値によるグリッド点間引きにある程度のゆとりを持たせておく必要がある[4]．これを adjacent zone と呼ぶ．間引きによって残ったグリッド点について，それぞれのグリッド点が属するレベルでの近接点と，一つ上のレベルの近接点が存在するかをチェックし，もし存在しない場合は内挿することとする．これを Fig.4 に示す．閾値による間引きがグリッド点を削減するために働くのに対し，adjacent zone はグリッド点を増加させるために働く．一般的な非定常問題では，発達するに従い流れ中のスケール成分分布が変化するため，adjacent zone の設定が非常に重要となる．こうしてそのタイムステップにおけるグリッド点の選択が終了する．この選択されたグリッド点上で空間微分等を求め，これを元に時間進行を行う．次のタイムステップでは前回の評価で残った点についてのみ，再び順次繰り返していく．

2.3 空間微分

グリッド点の選択により残ったグリッド点について不等間隔差分[5]を行うことも可能であるが，今回は Fig.5 に示すように，微分を求めたい点の近接点が存在しているかどうかをチェックし，もし存在していないようであれば再帰的に下解像レベルから内挿，これを差分微分要素として等間隔中心差分を行う．ここで添え字 *jmax* は最高解像度レベルを表す．

3.結果

ウェーブレットによるグリッド適合によりメモリ量の削減を行うには，本来スパースなデータ構造を採用する必要がある．しかし，本稿では第一段階としてウェーブレットによる適合性能の検証を目的としているため，すべてフル行列により計算を行った．

3.1 静的なグリッド適合

まず静的なグリッド適合性能を検証する．一次元で用いたテスト関数を Eq.(3)に示す． Fig.6 にεを 0，$1\text{x}10^{-5}$，$1\text{x}10^{-3}$，$1\text{x}10^{-1}$ と変化させた場合のグリッド点の分布を示す．

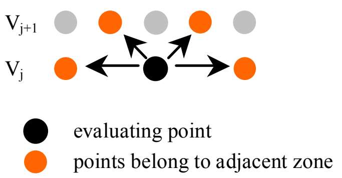


Fig.4 Adjacent zone

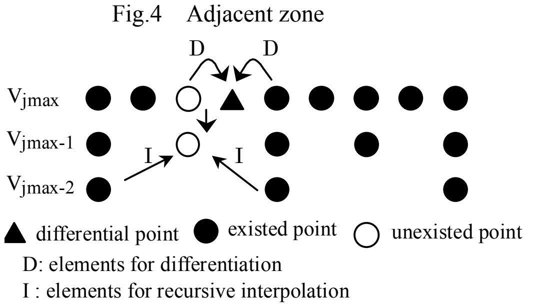


Fig.5 Example of differentiation by recursive interpolation

$$\begin{cases} f(x) = \sin(2\pi x) + \exp\left(-0.001(x-1/2)^2\right) & (0 \le x < 5/8,\ 6/8 < x \le 1) \\ f(x) = 0.5 & (otherwise) \end{cases} \tag{3}$$

ここで p = 4，*jmax* =13 とした．なお adjacent zone は考慮してない．Fig.6 は間引き後の存在グリッド点を，Fig.7 は間引き後残ったグリッド点が属する解像レベルとその位置の関係を表す．ε が大きくなるに従い間引きの程度が大きくなる．(a)ε = 0 は全く間引きを行わないものに対応し，分布が急峻となる位置以外では，解像度が過剰であると言えよう．(b), (c), (d)よりε の増加に伴い，急峻な勾配を持つ位置にのみにグリッドが集中している様子がわかる．比較的急峻ではあるが不連続ではない x =1/4〜1/2 付近では，εを増加させていくと小スケールに対応する高レベル成分が無くなっていく．これに対して不連続である x =5/8，6/8 では，εを増加させても最高レベルまでの成分が存在していた．

次に2次元での静的なグリッド適合性能を検証する．発達し定常となった cavity 流れについて適合を試みた．εは $1\text{x}10^{-3}$，$1\text{x}10^{-2}$ の 2 ケースを，レイノルズ数は Re = $1\text{x}10^{3}$，*jmax* = 6 とした．2 次元での内挿ウェーブレットはテンソル積，つまりそれぞれの方向で順次ウェーブレット係数を求め，これに閾値を科すことによって評価した．Fig.8，Fig.10 にグリッド適合を行った速度の各方向成分の等高線を示す．Fig.9, Fig.11 に選択されたグリッド点を示す．比較的勾配が急峻な位置にグリッド点が集中している様子がわかる．今回は速度の各方向成分について適合を行った．Fig.9，Fig.11 からわかるように各成分による評価でのグリッド点分布は異なったものとなり，実際の計算においては，空間中に存在するすべての従属量に対して評価を行う必要があろう．

3.2 一次元動的グリッド適合

次に Eq.(4)の 1 次元 Burgers 式により本手法の動的なグリッド適合性能を検証する．初期条件，境界条件をそれぞれ Eq.(5)，Eq.(6)に示す．またパラメータを Table.1 に示す．空間微分には再帰内挿による 4 次中心差分を，時間発展には古典 4 次 Runge-Kutta 法を用いた．Fig.12 (a)よりグリッド点は初期段階では領域全域においてはほぼ均一な分布となっている．Burgers 式では，時間発展に従い中央に急峻な領域が形成されていくが，(b)，(c)，(d)よりこれに対応してグリッド点も中心に集中していく様子がわかる．Fig.13 は存在グリッド点を位置-レベルの関係で表したものである．(a)より，初期段階ではレベル 6 までの比較的低レベルに属するグリッド点しか存在しないが，時間が発展するに従い，まず(b)では，中央以外のいくつかのグリッド点が除外され，この後(c)(d)に見られるように急峻な中心部分にレベル 10 までの高レベル成分が出現した．Fig.14 に存在グリッド点数の推移を示す．Fig.13 (b)に見られるように，初期段階から一度グリッド点数は減少していく．その後微小な増減は繰り返すが，全体的には増加傾向となる．全域に最高解像度を与えた場合と，今回の計算での最大グリッド点数とを比較するとほぼ 70:1 となった．スパース構造化した際，メモリ量も同様となるとは言えないが，かなりの圧縮率は期待できる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \tag{4}$$

$$u(x,0) = \sin x \tag{5}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \tag{6}$$

Table.1 Calculation parameters

p	*jmax*	ε	ν	Δt
4	13	$1\text{x}10^{-4}$	$1\text{x}10^{-9}$	$1\text{x}10^{-3}$

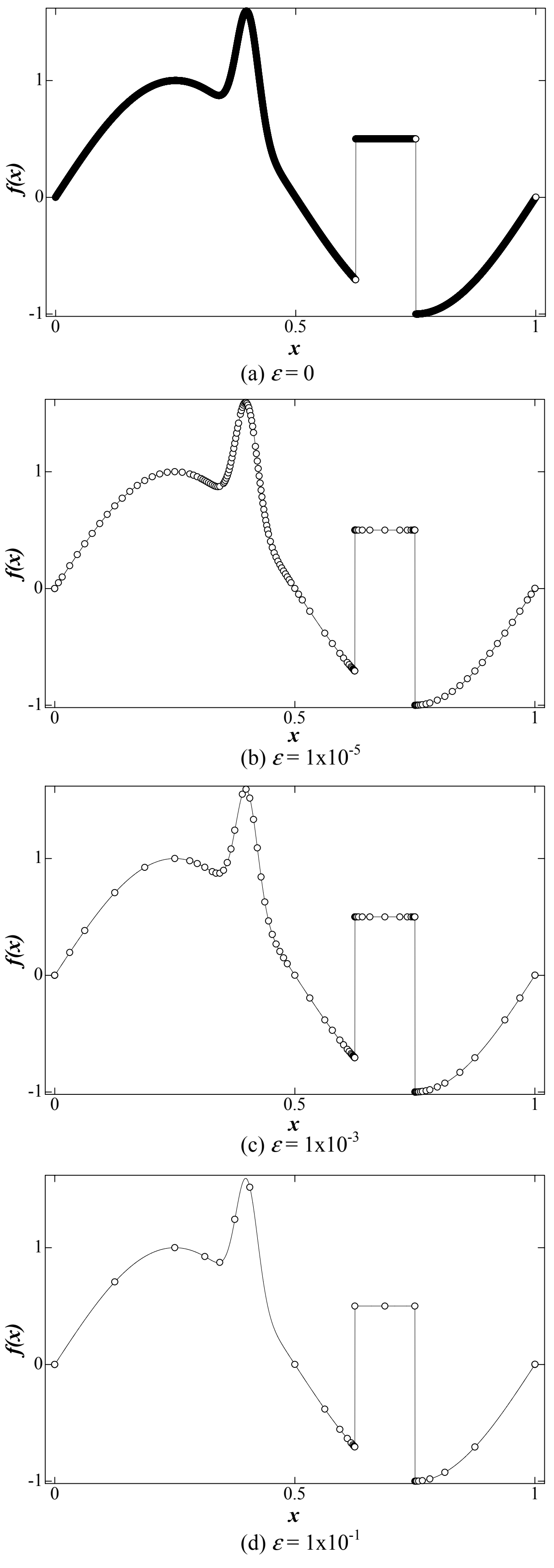


Fig.6 Grid points comparison with various threshold parameter ε

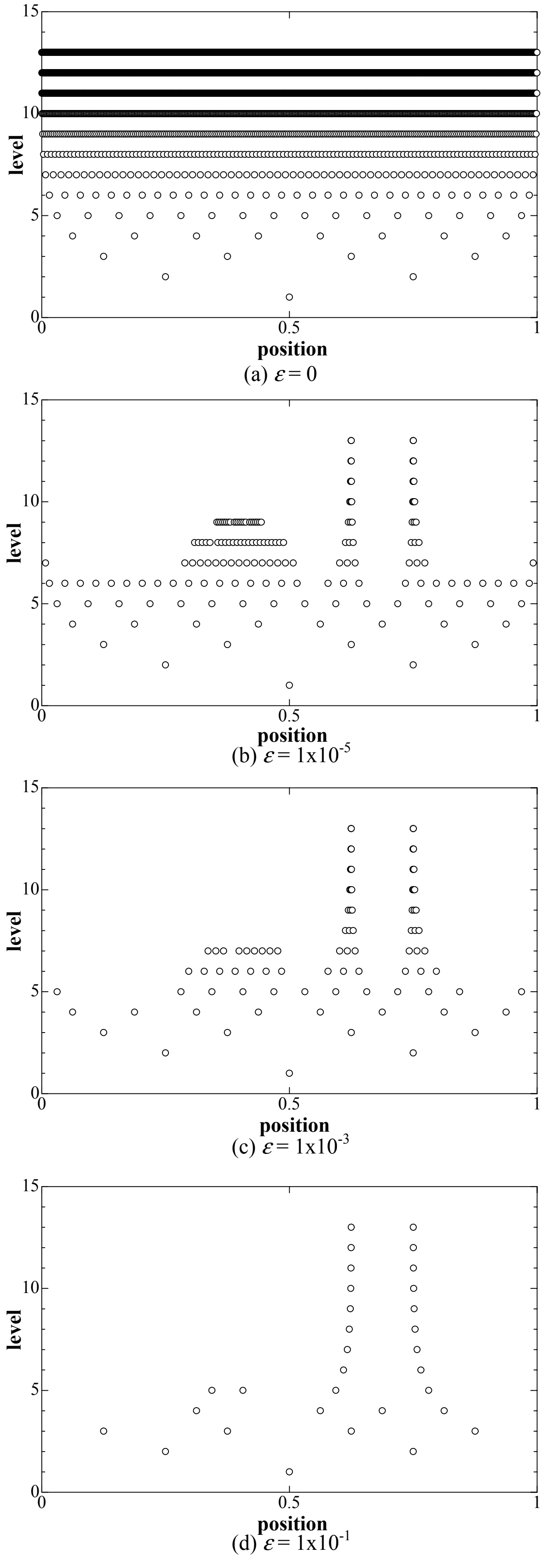


Fig.7 Grid points level-position comparison with various threshold parameter ε

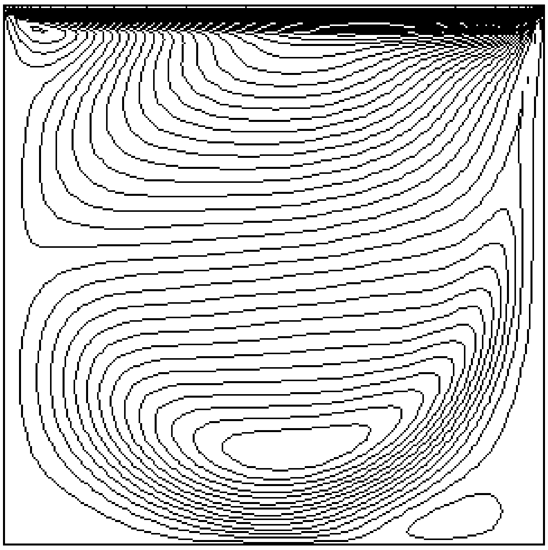
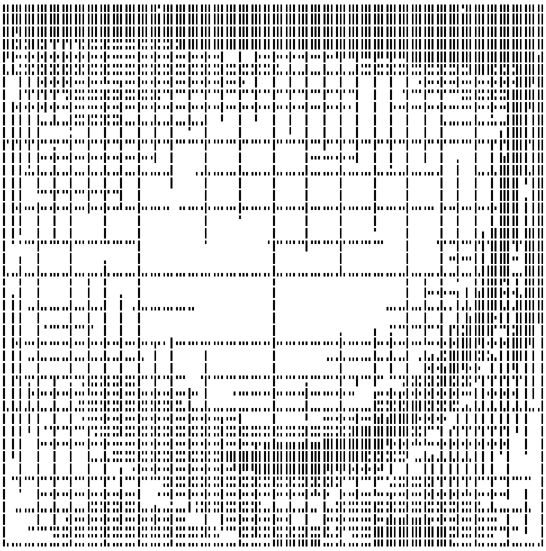
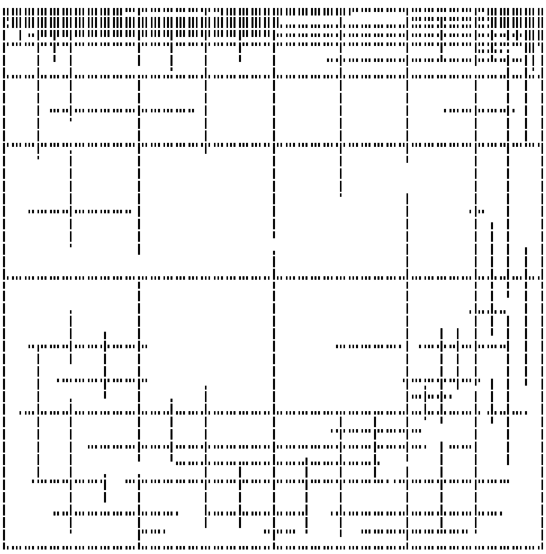


Fig.8 Contour of *x*-component of velocity



(a) $\varepsilon = 1\text{x}10^{-3}$



(b) $\varepsilon = 1\text{x}10^{-2}$

Fig. 9 Selected points by evaluation of *x*-component of velocity

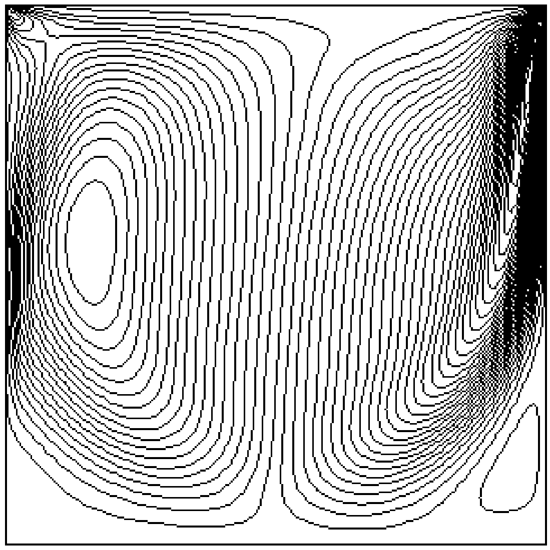
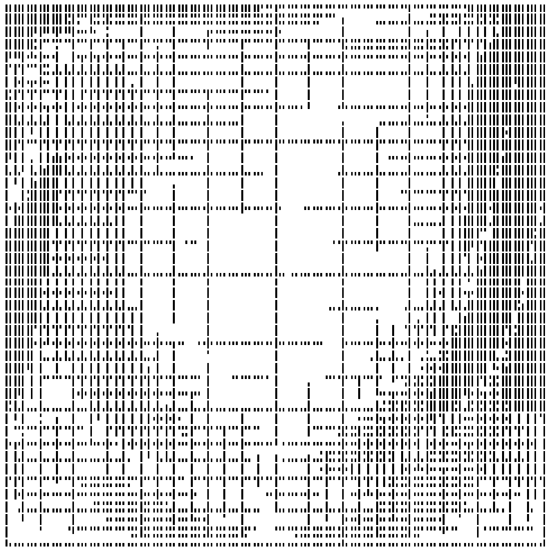
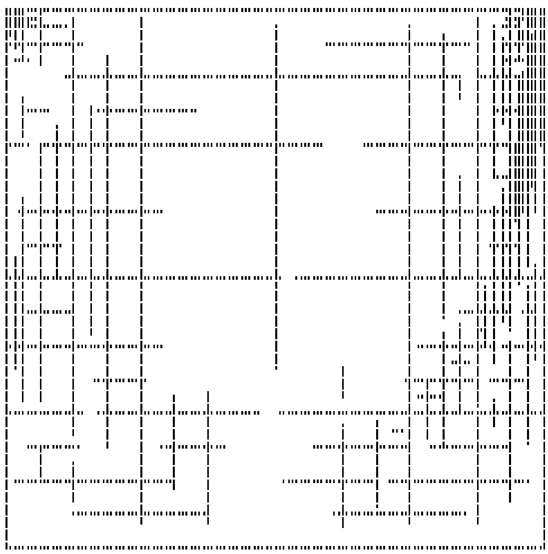


Fig.10 Contour of *y*-component of velocity

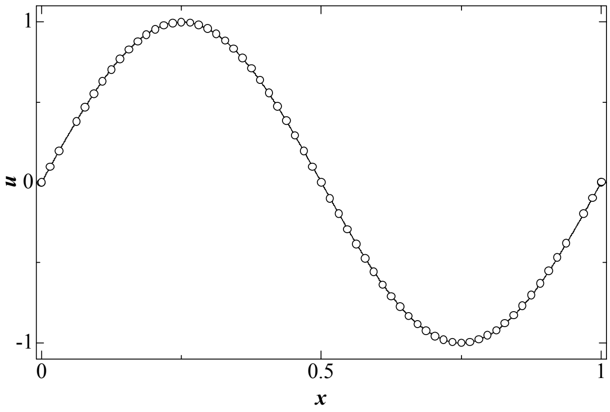


(a) $\varepsilon = 1\text{x}10^{-3}$

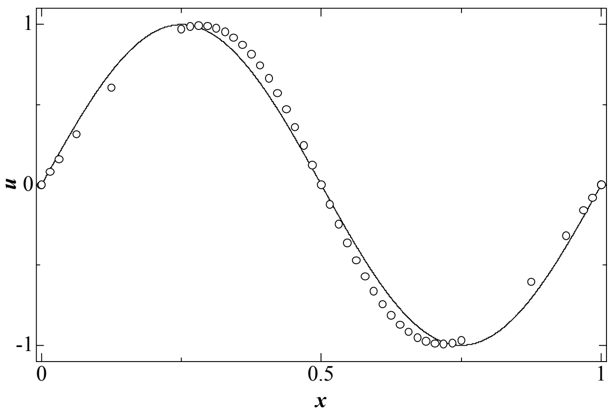


(b) $\varepsilon = 1\text{x}10^{-2}$

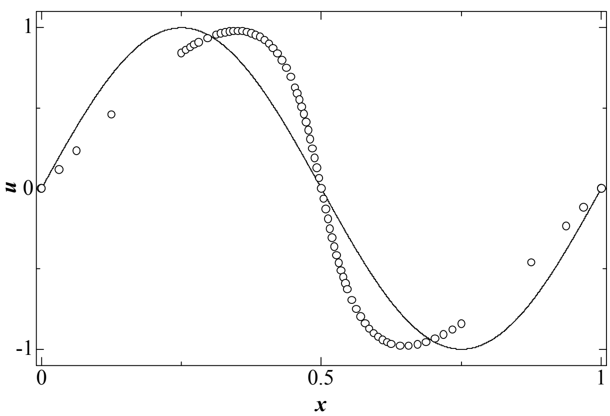
Fig.11 Selected points by evaluation of *y*-component of velocity



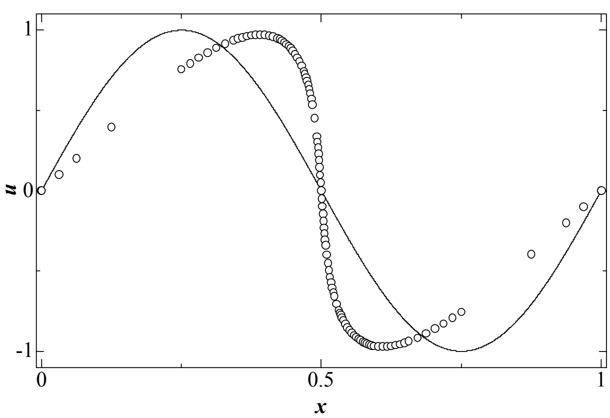
(a) $t = 0$



(b) t =1/4T

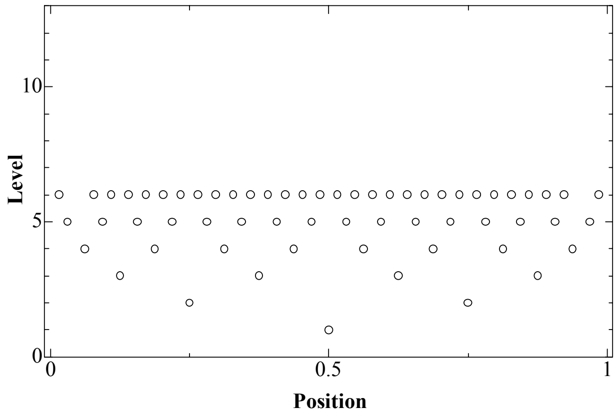


(c) t=3/4T

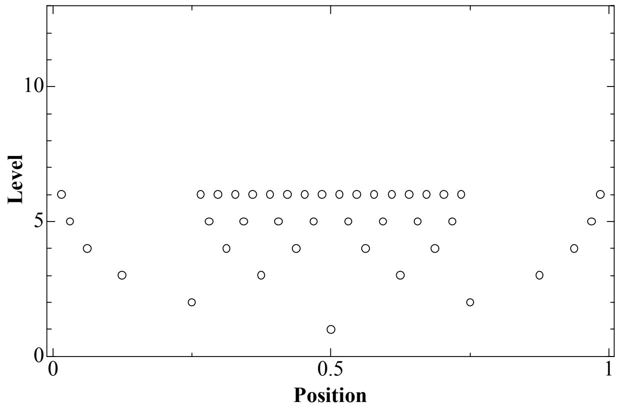


(d) t =T

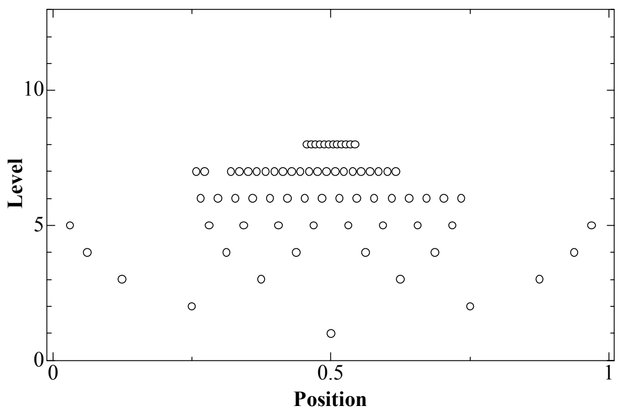
Fig.12 Dynamic grid adaption



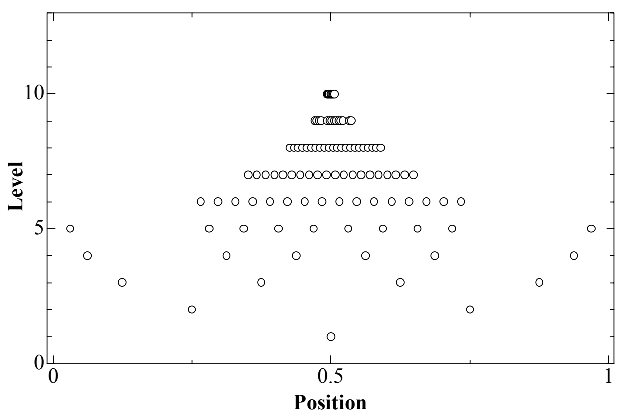
(a) $t = 0$



(b) t =1/4T



(c) t=3/4T



(d) t =T

Fig.13 Level-position relation on dynamic grid adaption

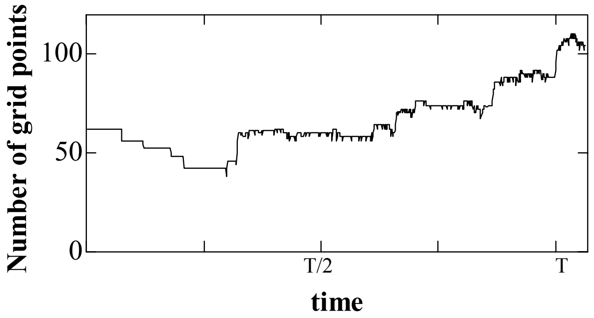


Fig.14 Number of existing grid points

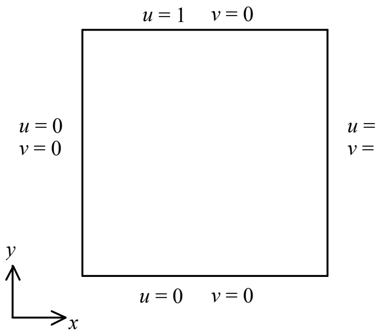


Fig. 15 Cavity flow problem

3.3 非圧縮多次元流れへの適用時の問題点

本手法を非圧縮多次元流れに適用する際，問題となるのが圧力解法である．流れ場中にグリッド点が分散し，動的に削除，追加が行われるため,連続性を満たすように圧力Poisson式を解き，これにより速度を更新するといった Simple/Mac系の解法を用いることが容易でない．各時間ステップにおいて存在するグリッド点情報から Delaunay/Voronoi 分割 (9) などの自動分割法によりコントロールボリュームを生成することも可能(10)であるとは思われるが,各タイムステップでの動的生成はコンピュータコストが非常に高いうえ，その性能についても疑問が残る．特に三次元への拡張を考えると，これはあまりよい選択肢ではない．本手法では点のまま取り扱うこととする．こういった意味では，グリッドレス手法 (11) (12) に非常に近いと考えられる．

圧力 Poisson 式の解法を避けた非圧縮性解析手法に Bao らによる弱圧縮モデル(13)がある．Bao らは圧縮性流体支配式の非圧縮状態への漸近挙動を，入念に検証することによって Eq.(7)，Eq.(8)のようにモデル化した．ここで M は Mach 数である．下添え字 t は時間微分を表す．弱圧縮モデルでは，厳密には$\nabla\bullet\mathbf{u} = 0$ を満たさないものの, 圧力 Poisson 式を解く必要がないため，スタッガード格子を用いる必要がない．またこれに関連して行列演算を一切行わず，陽的な時間発展スキームを用いるため非常にコードがシンプルになる．これらの特徴は，ウェーブレット選点法との組み合わせに非常に適していると言える．

$$\mathbf{u}_t + \nabla\cdot(\mathbf{uu}) + \frac{1}{\mathrm{M}^2}\nabla p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} \tag{7}$$

$$p_t + \nabla\cdot(p\mathbf{u}) = 0 \tag{8}$$

等間隔直交グリッド系において弱圧縮モデルの解析性能を検証する．計算体系は Fig.15 に示す正方キャビティ流れとした．時間発展に４次古典 Runge-Kutta 法を，空間微分には 4 次中心差分を用いた．各種計算条件を Table.2 に示す．Fig.16，Fig.17 に発達後の流速ベクトル分布，圧力分布それぞれ示す．また，Fig.18 に cavity 中心での平均速度分布を示す. Ghia らによる計算結果と非常によく一致していることがわかる．

弱圧縮モデルでは陽的な時間発展スキームを用いるため，時間刻み幅を大きくすることできない．しかし，各タイムステップにおける行列演算を一切行わないため，計算時間では圧力 Poisson 式を解くそれとさほど差はないと予想される．

Table.2 Calculation parameters

Re	*M*	Grid	Δt
1000	0.1	128x128	$5\mathrm{x}10^{-4}$

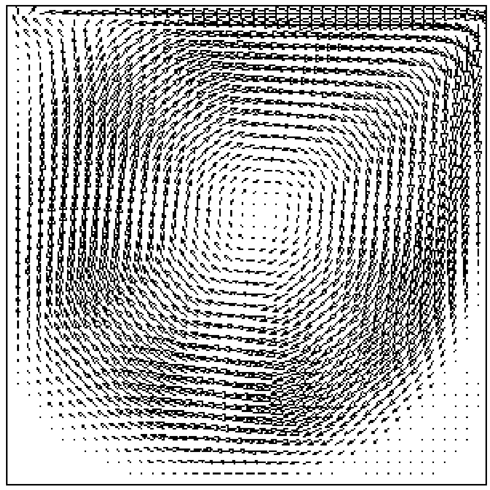


Fig.16 Velocity vector with Re = 1000, M = 0.1

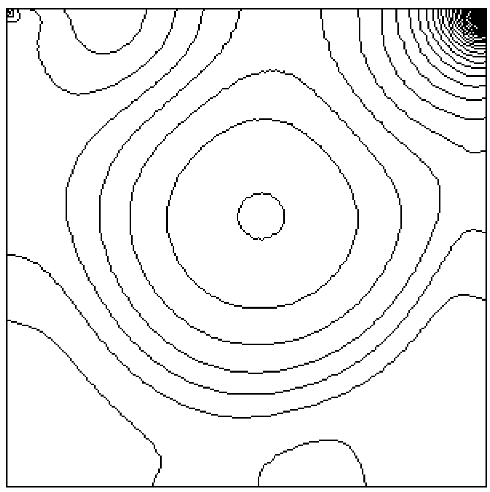


Fig.17 Pressure contour with Re = 1000, M = 0.1

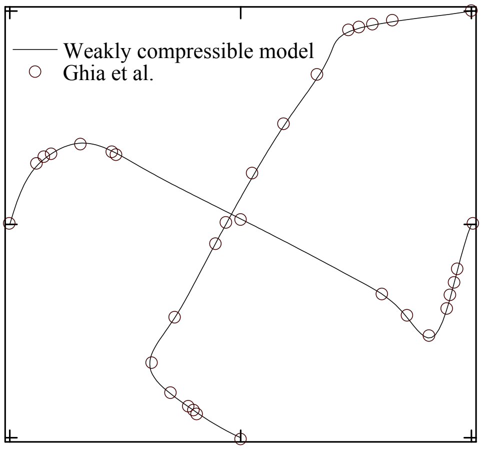


Fig.18 Mearn velocity profile at center of cavity

４.まとめ

1. 1, 2 次元テスト問題によりウェーブレットによるグリッド適合の検証を行い，その性能を確認した．
2. 弱圧縮モデルの有効性を確認した．
3. 今回はフルデータ構造を用い，適合性能のみを検証した． 実際計算においてデータ圧縮を行うには，スパースなデータ構造を採用する必要がある．
4. 今後まず2次元にて弱圧縮モデルとウェーブレットによる動的適合機能を組み合わせ，その後 3 次元に拡張する．

参考文献

(1) Graps, A., ”An introduction to wavelets,” IEEE Comput. Sci. Eng., **2**(1995), pp.50-61

(2) Farge, M., Kevlahan, N., Perrier, V., Goirand, E., “Wavelets and turbulence,” Proc. IEEE, **84**(1996), pp.639-669

(3) 輝, “ウェーブレットによる流れの解析・可視化の新展開,” 可視化情報, **21**(2001), pp147-152

(4) Vasilyev, V. O., and Paolucci, S., “A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain,” J. Compt. Phys., **125**(1996), pp.498-512

(5) Jameson, L., Miyama, T., “Wavelet analysis and ocean modeling: a dynamically adaptive numerical method “WOFD-AHO”,” Mont. Weath. Rev., **128**(2000), pp.1536-1548

(6) Holmström, M., “Solving hyperbolic PDEs using interpolating wavelets,” SIAM J. Sci. Comput., **21**(1999), pp. 405-420.

(7) Donoho, D. L., “Interpolating wavelet transforms,” Tech. report, 408 Dept. Statistics, Stanford univ., (1992)

(8) チュウイ, “ウェーブレット入門,” 東京電機大学出版 (1999)

(9) 谷口, “FEM のための自動要素分割:デローニー三角形分割法の利用,” 森北出版, (1992)

(10)Tanaka, N., “Development of highly accurate interpolation method for mesh-free simulation II. Application of CIVA method to incompressible flow simulations,” Int. J. Numer. Meth. Fluids, **34**(2000), pp.403-424

(11)BATINA, T. J., ”A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex-aircraft applications,” AIAA paper-93-0333, (1993)

(12)森西, “圧縮性流れに対する風上グリッドレス型解法,” 機論 B, **66**(2000) pp.3092-3099

(13)Bao, W. and Jin, S., “Weakly compressible high-order I-stable central difference schemes for incompressible viscous flows,” Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **190**(2001), pp. 5009-5026