

<CIP 法による界面捕獲の研究> <Front tracking by CIP method>

土屋祐輔、東京工業大学大学院、東京都目黒区大岡山 2-12-1, ytsuchiya@es.titech.ac.jp

矢部孝、東京工業大学教授、東京都目黒区大岡山 2-12-1, yabe@mech.titech.ac.jp

Yusuke Tsuchiya, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oookayama Meguroku Tokyoto

Takashi Yabe, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oookayama Meguroku Tokyoto

In the case where the solid, the liquid, and the gas coexist, there appear jumps in density and material properties at the interface. Interpolation with step-like profile for such interface will introduce serious errors which cannot be disregarded. Therefore, as interface is captured accurately, it will cause difficulty since the discontinuity is introduced in Cartesian grid which is not always parallel to the interface. Here we propose a technique to these problem by changing the interpolation locally.

1. 緒言

固気液共存場などの界面上では、界面を挟むそれぞれの物質の密度や物質の性質が大きく跳んでいることが常である。その不連続性のため、界面を直接またぐように補間や差分を行う事は、深刻で無視できない誤差を生む原因となるため、界面捕獲は重要な問題であるが、非常に大きな困難を生じさせる。

そこで本稿では、異なる物質同士の密度・圧力・速度を分け、さらに界面を物質ごとのプロファイルを用いて補間することで、様々な物質に対して、不連続面を精度良く解くための計算手法を紹介する。

2. 原理

2 - 1. 基礎方程式

基礎方程式は、以下に示す 2 次元圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式、密度関数と連続の式、圧力の式である。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) P = -r C_s^2 \nabla \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) r = -r \nabla \cdot \vec{u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{r} \nabla P \quad (3)$$

密度関数の移流に対しては、を次のように Tangent で変換し^[1]、

$$F_f = \tan\{0.99p(f - 0.5)\} \quad (4)$$

この F_f を使って次式で移流させる。

$$\frac{\partial F_f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) F_f = 0 \quad (5)$$

また圧力に関しては(1),(3)より求められる以下のポアソン方程式を Bi_CGSTAB 法を用いて解いた。

$$\nabla \left(\frac{\nabla P^*}{r^n} \right) = \frac{P^* - P^n}{r^n C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \vec{u}}{\Delta t} \quad (6)$$

以上の基礎方程式に対して、等間隔のスタッガード格子を用いた。

ここで、音速 C_s は各セルごとに局所的音速を用い、密度関

数 f を用いて、

$$C_s^2 = f C_g^2 + (1-f) C_l^2 \quad (7)$$

とした。 C_g 及び C_l は空気と水の音速を表し、以下のように定める

$$C_g = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{r}} \quad (8)$$

$$C_l = \sqrt{\frac{n(p+B)}{r}} \quad (9)$$

$B = 296.3 \text{ MPa}$, $n = 7.415$ である。

また本稿では、水に対しては状態方程式である Tait 方程式を使い、気体に関しては移流計算をする方法^[2]と、水と空気共に移流計算を行う方法とを比べる。Tait 方程式は以下で表せる。

$$\frac{P+B}{P_0+B} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \quad (10)$$

Tait 方程式は圧力と密度のみの関数であることから、圧力の移流計算した結果を用い、直接密度を求める。

2 - 2. 分離

本稿では、二次元での水柱に衝撃波をぶつける問題を例題とする。この例題を CIP 法を用いて、気相と液相をまたいだ補間計算を行うと、計算格子内における極端な密度差によって、アンダーシュート、オーバーシュートが生じ、その大きさが気体の密度と同程度以上のものとなることで精度が落ちてしまう他、水の密度が下流側に流れ出てしまい界面がぼやけてしまうという問題が生じる。そのため、異なる物質を含む計算を行う際には、個々の物質毎に空間プロファイルを見積もる事によって問題を解決させる。異なる物質同士の情報を用いた補間に比べ、物質毎に分けるほうがより物理的である。

物質毎に分ける方法は、具体的には密度関数 $f \in [0,1]$ を使った方法を用いる。

簡単のため、1次元で議論を進める。物理量 f_i^n を f_i^{n+1} に更新する場合を考える。物質量 f を更新する前に密度関数 f

についての移流方程式を解き、 f_i^n を f_i^{n+1} に更新する。この f_i^n と f_i^{n+1} を比べる事で、界面の移動を認識することができる。 f を $f \in [0,1]$ と定義しているの、界面を $f = 0.5$ となる位置と考おけ、 $f_i^n \geq 0.5$ かつ $f_i^{n+1} \geq 0.5$ 及び、 $f_i^n < 0.5$ かつ $f_i^{n+1} < 0.5$ となるとき i 点は $t=n, n+1$ で物質の移動は行われていないと判断できるし(Fig.1(A))、また $f_i^n \geq 0.5$ かつ $f_i^{n+1} < 0.5$ 及び、 $f_i^n < 0.5$ かつ $f_i^{n+1} \geq 0.5$ となるとき i 点は $t=n, n+1$ で物質移動が起こったと判断できる(Fig.1(B))。ここで $f_i^n \geq 0.5$ における等号について補足しておく、界面が i 点上にぴったり乗ってしまった場合には、さらに補間がうまく行われないことが考えられるため、このような場合には 0.5 より上の物質か下の物質に含める事によって回避でき、またこのことが大きく計算結果に影響を及ぼす事はないと考えられる。

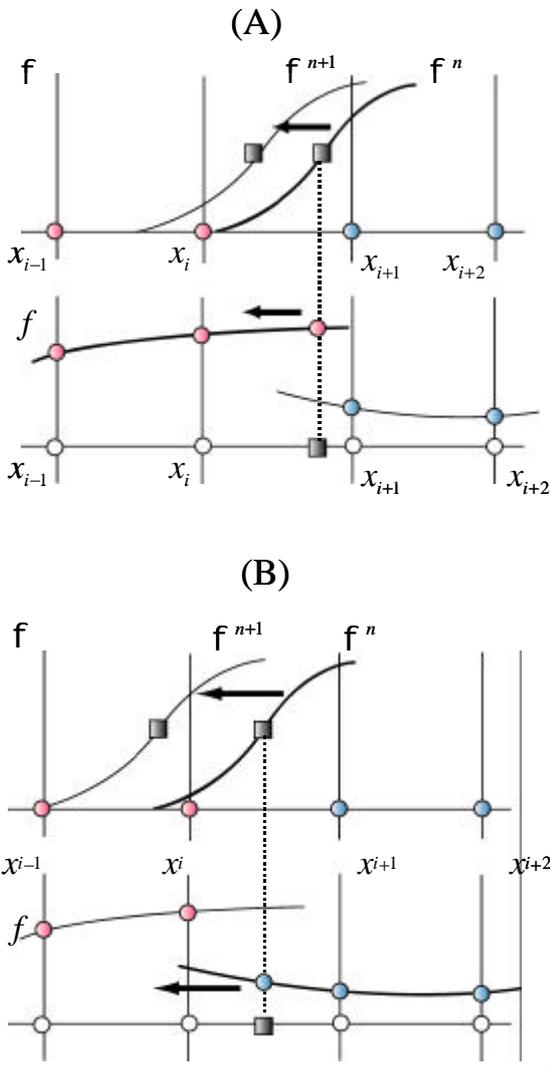


Fig.1 The interface in one dimension . (A)The interface located within the cell $[x_i, x_{i+1}]$ at $t=n$ remains in the same cell at $t=n+1$. (B)The interface crosses the boundary x_i at $t=n+1$.

2 - 3 補間関数

次に2次元での分離について考える。2次元では、格子点 (i, j) が $t=n, n+1$ での物質の移動の有無以外にも、 $t=n+1$ に時間発展させる際に、 (i, j) の移流原点を含むセル内に界面が存在するかないかを考えなければならない。つまり、移流原点を含む格子点を (i_{up}, j) 、 (i, j_{up}) 、 (i_{up}, j_{up}) とすれば、 $t=n$ のときの各格子点が (i, j) と同じ物質かどうか補間関数をつくる際に重要になるため、密度関数 $f_{i_{up}, j}^n$ 、 $f_{i, j_{up}}^n$ 、 $f_{i_{up}, j_{up}}^n$ も合わせて判断しなければならない。本稿では以下の7通りの状況を考え、それぞれに補間関数を適用していくことを考える。

- (I) (i, j) が $t=n, n+1$ で物質移動が起こらないとき
- (O) 移流原点を囲む格子点全てが、 (i, j) と同じ物質のとき
 - $t=n$ で移流原点を囲む格子点のうち1つが異なる物質のとき
 - $t=n$ で移流原点を囲む格子点のうち2つが異なる物質のとき
 - $t=n$ で移流原点を囲む格子点のうち3つが異なる物質のとき

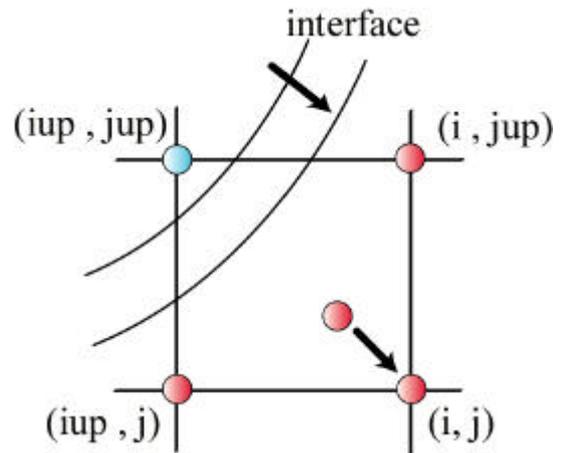


Fig.2 The interface in two dimensions .The interface located within the cell at $t=n$ stays in the same cell at $t=n+1$.

- () (i, j) が $t=n, n+1$ で物質移動が起こるとき
 - $t=n+1$ での (i, j) の物質と同じ物質がセル内に3つあるとき
 - $t=n+1$ での (i, j) の物質と同じ物質がセル内に2つあるとき
 - $t=n+1$ での (i, j) の物質と同じ物質がセル内に1つあるとき

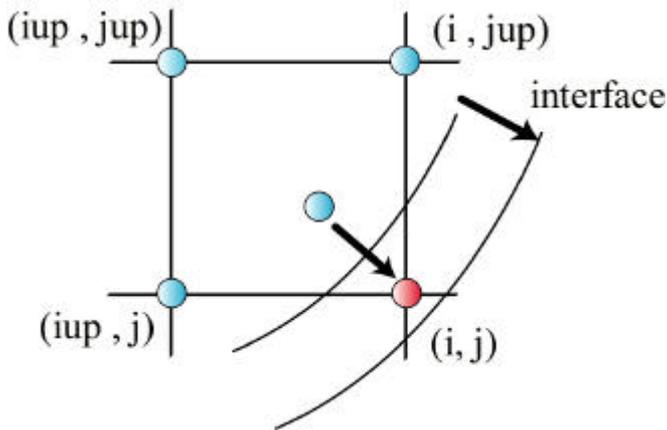


Fig.3 The interface in two dimensions. The interface located in the cell at $t=n$ crosses at $t=n+1$. The material of (i, j) changes.

上のように分けたとき、()の(0)は、通常のCIP補間を行う。また()、()の、に、における補間関数は以下のように決める。

$$F(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gx + hy + i \quad (6)$$

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \quad (7)$$

$$F(x, y) = ax + by + c \quad (8)$$

ここで、()の状況での補間においては、 (i, j) は $t=n$ から $t=n+1$ で物質が変化するので、 (i, j) の値を使った補間はできないことに注意しなければならない。

この補間法は、界面を含むセルに隣りあった格子点からの情報を犠牲にしている分、1セル内で完全に完結させているので、非常にコンパクトになっている。そのため、捕えようとしている現象が複雑に入り組む場合に威力を発揮すると考えられる。

また今回紹介した補間法では、格子点の情報の少なさをゆえに、極端な値も取りうるため、monotoneスキームなどを適用させる事で、極端な値をとることを防ぎたい。

2 - 4 . 計算アルゴリズム

全体は時間の Fractional Step によって構成される。

$$f^{n+1} - f^* = \text{Non - Advection Phase}$$

$$f^* - f^n = \text{Advection Phase}$$

水、空気共に移流計算を行う場合

- 1) 非移流項の計算
- 2) 密度関数の移流
- 3) 移流項の計算

密度関数からどのタイプの補間関数を使うか場合分けをする

水を Tait 方程式を使って求める場合

- 1) 非移流項の計算

密度に関しては、気体部のみを計算

- 2) 密度関数の移流
- 2) 移流項の計算
 - 空気側のみ密度の界面補間を行う
- 4) Tait 方程式を使って移流計算後の圧力から密度を求める

3 . 結果

3 - 1 . 計算条件

100 × 100 の計算格子に直径 20 グリッドの液柱を計算領域の中心に置く。また計算領域の右側に高圧縮空気、その他の領域に低圧縮空気を置き、以下のような初期値とした。

	grid<33	grid>33	circle
pressure[MPa]	23.5	10	0.1
density [kg/m ³]	181	100	1000

3 - 2 . 計算結果

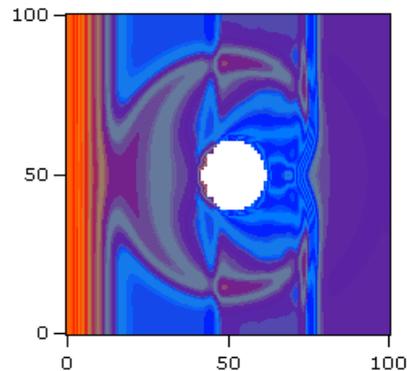


Fig.4(a) Density contour of Gas phase (Tait equation used)

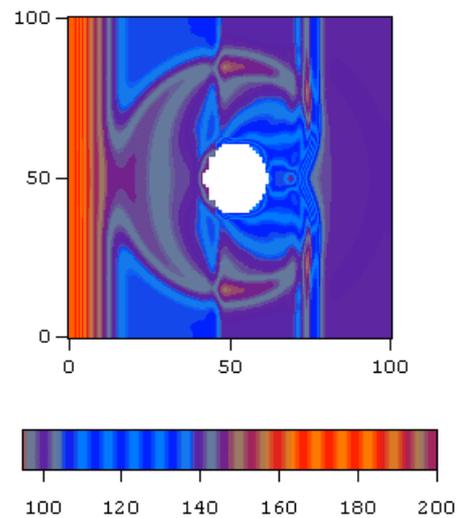


Fig.4(b) Density contour of Gas phase (Only advection)

Fig4(a)は水の密度を Tait 方程式を用いて解いた場合で、(b)は水、空気ともに移流項を解いた場合であるが、気相部分については、ほぼ同じ結果が得られている。しかし下の Fig.5、Fig.6 を見ると、微妙に差が現れているのがわかる。

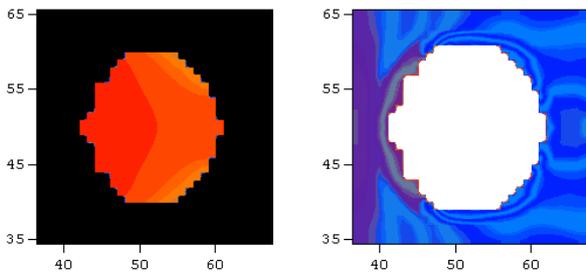


Fig5.(a)

Fig.5(b)

Fig.5(a),(b) Tait equation is used .(a)Density contour of Liquid phase (b)Density contour of Gas phase.

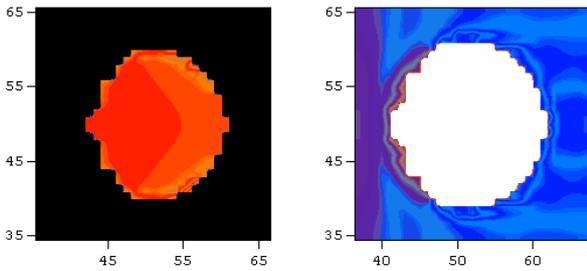


Fig.6(a)

Fig.6(b)

Fig.6(a),(b) Tait equation is not used .(a)Density contour of Liquid phase (b)Density contour of Gas phase.

Fig.5(a)は Fig.4(a)の液柱付近を拡大したもので、Fig.5(b)が Fig.4(b)の液柱付近を拡大したものである。Fig.6(a)の水の密度分布の液柱の上部、下部の界面付近で、Tait 方程式で解いた場合に比べて密度が最大 0.41% 上昇している。水の状態方程式である Tait 方程式には水の非圧縮性の効果が含まれているが、移流のみで解いた場合には、水も空気も、音速が異なる流体というだけの差しかないので、状態方程式を用いた場合よりも、水の密度が変動しやすいという違いはある。しかし、それらを踏まえた上でも、移流のみの場合には、液柱上部、下部の縁部の密度上昇は少々気がかりである。

界面で密度が上昇している部分は、この部分の界面補間を行うにあたって、移流原点を含むセル内の水の格子点数が 2 つ以下になる箇所である。補間関数を構成する格子点数が減る事により、情報が限定的になり、用いた格子点の影響がより強くなって出てしまう。さらにこの影響が強くなってしまった格子点の影響を受けた下流側の点が、また影響を受けてしまうため、連続的に密度が上昇してしまったと考えられる。このため上流側の密度の影響を強く受けたが、液柱の y 方向（縦方向）からの情報が入らなかったために、y 方向に隣り合った点の値と差が出てしまう結果となったと考えられる。

4 . 結論

異なる物質同士の計算において本稿で紹介した 1セルのみで完結する界面補間法で界面を捕らえられることがわかった。

ただし、今後の課題として前節で述べたような問題点がある。これは 1セルだけで補間するために精度を多少犠牲にした結果と言えるが、異なる物質が複雑に入り組む計算などに対しては、1セルだけで補間関数を作れるというコンパクトさは非常に有用なものである。場合に応じて、1セルでのコンパクトさを必要としない箇所には 2セルで外挿する方法などと併用することで計算精度を上げられると考えられる。

参考文献

- [1]矢部孝、青木尊之：“固体、液体、気体の統一解法を目指す CIP 法 ”、計算工学、19-25、vol.1、No1、1996
- [2]D. Igra and K.Takayama、Rep . Inst .Fluid. Science、123-134、Vol . 11、1999