

CIP法に適した動的境界適合格子形成法（ソロバン格子）の研究

Adaptive Moving Grid (Soroban Grid) Suitable for CIP scheme

森木洋, 東京工業大学大学院, 東京都目黒区大岡山 2-12-1, hmoriki@es.titech.ac.jp
 矢部孝, 東京工業大学教授, 東京都目黒区大岡山 2-12-1, yabe@mech.titech.ac.jp
 Hiroshi Moriki, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oookayama Meguroku Tokyoto
 Takashi Yabe, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oookayama Meguroku Tokyoto

Solving the movement of complex deformable structure, the method of body-fitted coordinates has been commonly used, but the enormous calculation load for the grid formation is a serious problem. Applying the CIP method to such body-fitted coordinate needs coordinate transformation for interpolation leading to the loss of simplicity of the scheme. The purpose of this research is to develop a simple grid formation scheme suitable for CIP scheme, and to prove the effectiveness of this scheme by applying the method to various subjects.

1. 緒言

流体シミュレーションにおいて格子は非常に重要な要素となる。物体形状が単純であれば、デカルト座標を用いて計算できるが、実際に解きたい流れ場の多くは、航空機まわりやエンジン内部など複雑なものであることが多い。これらの問題に対しては、物体適合座標を用いた方法が一般的であるが、その格子形成に多大な計算負荷がかかることが問題となる。特に境界が移動する問題においては計算の途中に格子を形成しなおす必要が生じ、その計算負荷は膨大となる。

また、移流方程式を高精度かつ安定に解く計算スキームである CIP 法において、そのような物体適合座標を用いて計算を行うと座標変換による計算負荷が発生し、スキームの簡便性を損ねる。

このような背景から、本研究では簡単かつ CIP 法に適した格子形成方法を開発し、様々な例題に適用することにより本手法の有効性を検証する。

2. 格子形成法

本研究では、流れ場を適切なモニター量によってモニターすることによって、解に適合した格子形成を行う解適合格子法を考えた。解適合格子法では、格子の分割・結合により格子を形成する AMR (Adaptive Mesh Refinement) 法が有名であるが、本研究では、初期に与えられた格子数を用い、モニター量に従って適当な位置に移動させることによって格子形成を行う。以下に 1 次元での格子形成法について説明する。

流れ場のモニター量を(1)式のように定義する。この値は、ある 2 格子点間での物理量の変化の値を表しており、この値が大きいくところほど物理量の変化の激しいところとなり、格子を密にする必要がある。また、 M はそれぞれフリーパラメータであり、その値を変えることにより格子の粗さを調節できる。

$$M(x,t) = \sqrt{1 + a \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + b \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|} \quad (1)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x,t) dx = \frac{1}{N} \int_{x_L}^{x_R} M(x,t) dx, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

(1)式で定義したモニター量を用い(2)式に従って格子を分割する。この式は、(1)式で定義したモニター量を計算領域全体で等しくなるように格子を分割することを意味しており、これにより、物理量の変化の激しいところでは格子が密に、変化の緩やかなところでは格子が疎になるように、格子を分割することができる。格子分割の原理を図 1 に示す。

次に 2 次元での格子形成法について説明する。2 次元の場合では、格子の移動を一方向づつ行うことにより、1 次元でのアルゴリズムを用いて格子を分割する。ここで格子の複雑形状による計算手法の複雑化を避けるため次の制約を科した。ある 1 方向に対してはそれぞれの格子点で移動を行い、もう一方向に対してそれぞれの格子点を結ぶ線で移動する。このようにしてできる格子形状を図 2 に示す。また、この格子は形状がちょうどソロバンのようになるため**ソロバン格子**と名づけ、以下この格子を**ソロバン格子**と呼ぶ。

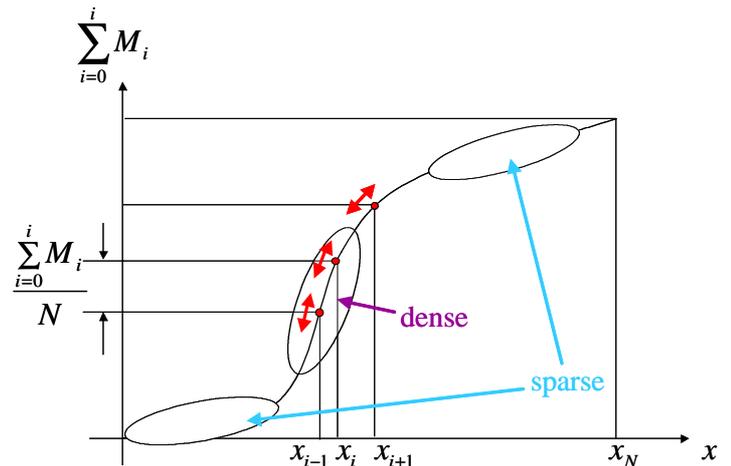


Fig. 1 The principle of grid generation method

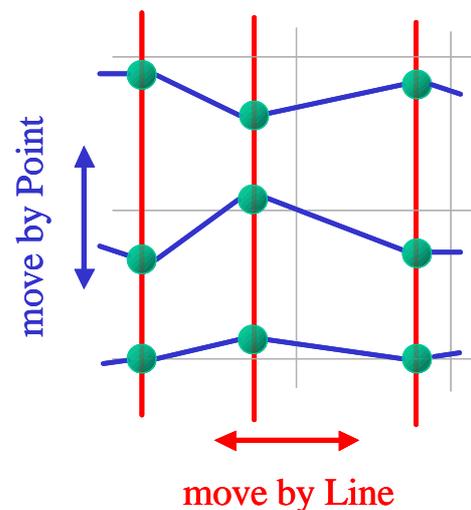


Fig. 2 Soroban Grid

3. 計算例

3.1 移流計算

上記のアルゴリズムと CIP 法を用いて、(3)式に示す移流方程式を解いた。ここで、速度 u は一定である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

最初に本研究の核となる CIP 法について簡単に説明する。CIP 法とは、『格子間のプロファイルも元の方程式を満足するように構成する』ことを提案した手法であり、解析解に近い補間を構成することができる。具体的には、各格子において物理量だけでなく、その空間微分値も変数として用いることにより 2 格子点間を 3 次の補間関数で近似する。今、格子 $i-1$ と i の 2 格子点間の補間関数を $F(x)$ と定義すると、 $n+1$ ステップ後の物理量 f の値は、固定格子において(4)式のように求まる。また 2 で説明した格子生成により作成される移動格子において、格子は(5)式に示す速度を持つため、 $n+1$ ステップ後の f の値は(6)式のように求まる。以上の原理を図 3,4 に示す。

$$f_i^{n+1} = F_i(-u\Delta t) \quad (4)$$

$$u_g = \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} \quad (5)$$

$$f_i^{n+1} = F_i[-(u + u_g)\Delta t] \quad (6)$$

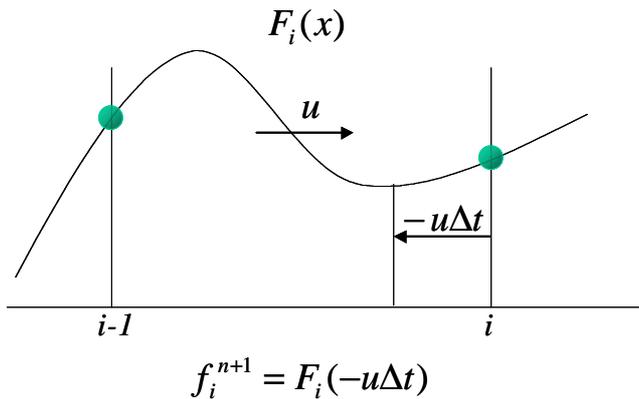


Fig. 3 Profile on the fixed grid system after t

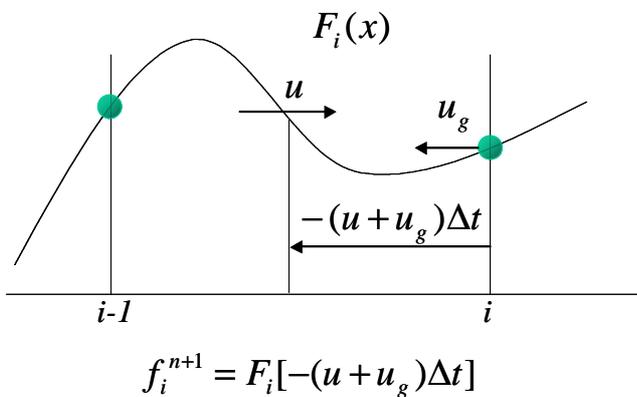


Fig. 4 Profile on the moving grid system after t

以上の原理により、固定格子および移動格子を用いて計算を行った。1000 ステップ後の固定格子と移動格子によるプロファイルの比較を図 5 に、また移動格子を用いた時の格子幅を図 6 に示す。図 5 より、固定格子に比べ、移動格子の方が界面をよく捕らえられている事がわかる。また図 6 より、界面付近に格子が集まってきている様子がわかる。しかし依然として格子界面前後でのオーバーシュート、アンダーシュートの問題が残ってしまう。これは、補間関数に有利関数 CIP 法 [1] を用いることにより解決することができる。1000 ステップ後の有利関数 CIP 法を用いた固定格子と移動格子によるプロファイルの結果を図 7 に示す。図 7 に示したように移動格子を用いた有利関数 CIP 法では解析解とほぼ一致した結果が得られた。

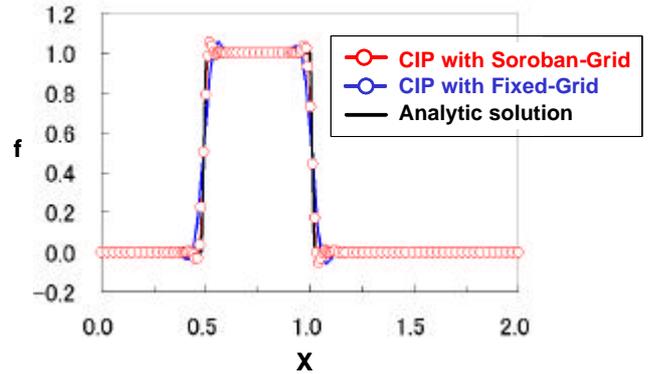


Fig. 5 Linear wave propagation

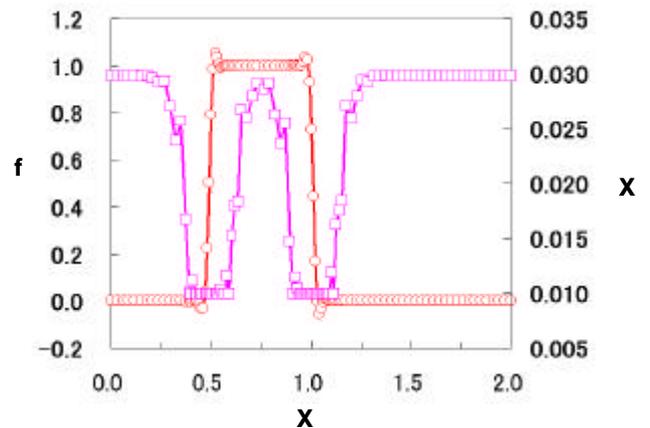


Fig.6 Grid width and wave profile

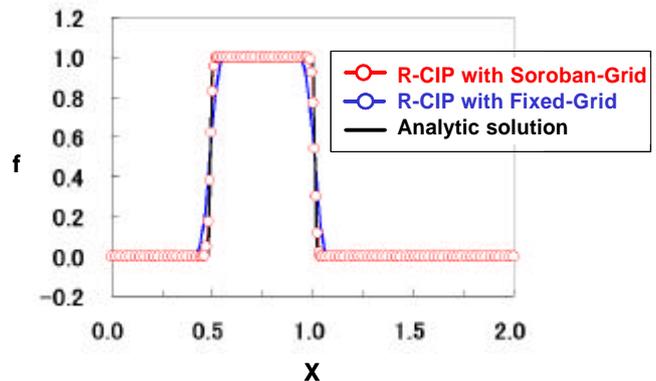


Fig.7 Linear wave propagation

3.2 流体計算

ソロバン格子を用い、2次元円柱周りの非圧縮性粘性流体の問題を解いた。支配方程式は連続の式(7)とナビエ・ストークス方程式(8)式となる。ナビエ・ストークス方程式は基本的に移流現象(9)式、拡散現象(10)式、加速現象(11)式の3つの現象の和として扱うことができる。そこで個々の現象を別々に取り扱う方法として3段階分解法[2]を用いて問題を解いた。

((支配方程式))

$$\nabla n = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \nabla n = -\frac{1}{r} \nabla p + u \Delta n \quad (8)$$

((3段階分解法))

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \nabla n = 0 \quad (\text{移流現象}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = u \Delta n \quad (\text{拡散現象}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r} \nabla p \quad (\text{加速現象}) \quad (11)$$

移流相(移流現象)にはCIP法を用い、非移流相(拡散現象・加速現象)には有限要素法を用いた。ここで、2次元ソロバン格子における移流相の解法を説明する。

((2次元ソロバン格子での移流))

2次元ソロバン格子は図2のようになり直交性を有しない。そこで、図8に示すように、移流原点を含む領域で1次元CIP法の組み合わせることで移流原点における物理量を補間する。このようにdirectional splittingを用いることにより、格子が直交性を有しない場合でも、1方向さえ線で整列されていれば、座標変換を行わずに移流原点の物理量を補間することができる。近年、有限要素法にCIP法が使われることが多くなってきているが、格子形状の自由な有限要素法において、CIP法を組み込むとき、その座標変換の計算コストが問題となる。しかし、ソロバン格子ではその計算負荷をかけずに計算を行うことができる。

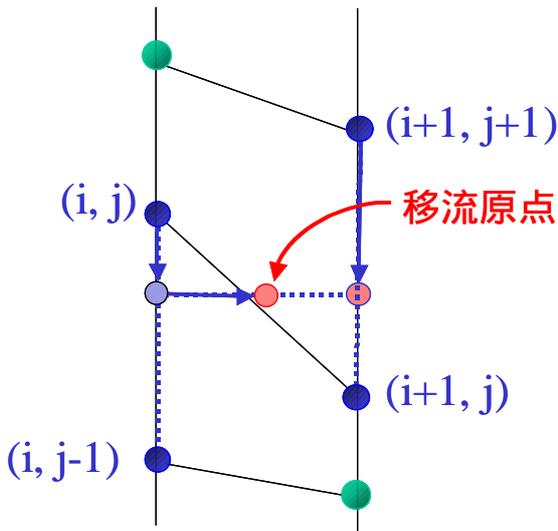


Fig. 8 The principle of interpolation with Soroban Grid

((2次元ソロバン格子での微分値の更新))

CIP法において、物理量の空間微分値も必要とするため、非移流相を計算し終えた時点で、その影響を微分値に反映させる必要がある。ソロバン格子における非移流相の影響の計算は次の2つの方法で行った。方法1では、左右に隣接する点の傾きをx軸方向に分解し、その値を用いて各格子間の重みを考えた式(12)より求める。方法2では、自分の真横の点をそれをはさむ2点で補間して求め、その値を用いて、2次中心差分より値を用いて求める。

$$f_x = \frac{dx_2}{dx_1 + dx_2} f_{x1} + \frac{dx_1}{dx_1 + dx_2} f_{x2} \quad (12)$$

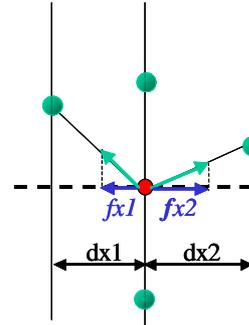


Fig.9 Method1

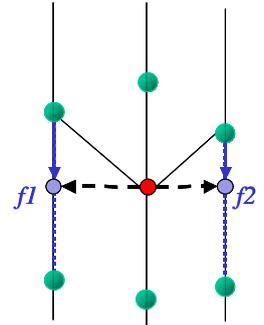


Fig.10 Method2

((計算条件))

以上のアルゴリズムを用いて、幅0.2mの流路におかれている直径0.02mの円柱周りの2次元流れの計算を行った。計算に用いた格子数は、55*65で計3575点用いた。解析する領域を図9に、円柱周辺のソロバン格子を図10に示す。初期条件として速度および圧力は零として、 $t > 0$ において円柱上流から一様流 u_0 が流入するものとした。速度の境界条件としては、円柱表面にはノースリップ、流路側壁にはスリップを課している。レイノルズ数 $Re=100$ 、計算時間間隔 $dt=0.08$ として計算を行った。

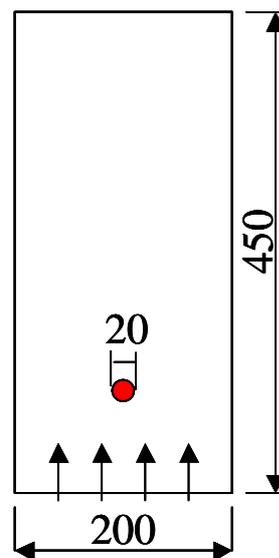


Fig.11 Domain of analysis

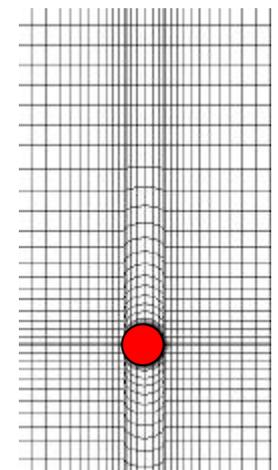


Fig.12 Soroban Grid

(計算結果)

13000 ステップ後の圧力分布結果を図 13 に、渦度の分布の結果を図 14(a),(b)に示す。圧力は円柱前方で局所的に高くなっており、円柱後方にはカルマン渦列の発生が見取れ、円柱周りの流れを再現できている。渦放出の周波数を調べ、無次元数であるストロハル数を計算すると、0.166 となった。実験値は 0.164 であることから本計算が妥当なものであることがわかる。

また、図 14 から円柱後方で渦の発生が見取れる。図 14 の(a),(b)は両方とも同じ計算時間後の渦度を表示しており、その違いは(a)が、渦度を 13000 ステップ後の速度のプロファイルから差分により求めているに対し、(b)は CIP 法が持っている微分値から渦度を求めている。両者をよく比較すると、CIP 法の微分値を用いて表示している(b)の方が、渦度が滑らかに表示されている。これに示されるように、CIP 法を用いて計算を行えば、計算結果のビジュアライゼーションにおいて、非常に効果的であると考えられる。

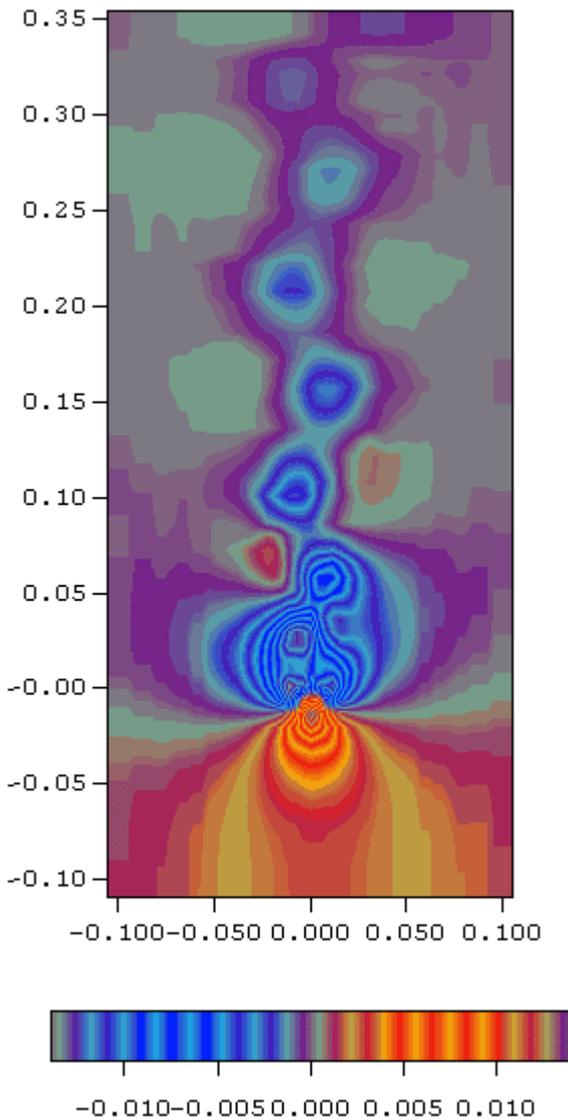
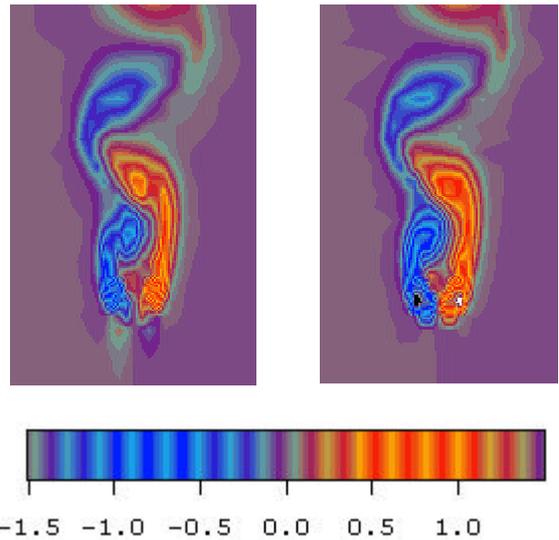


Fig.13 Pressure profile



(a) finite difference (b) cip

Fig.14 Vortex profile

4. 結論

簡単かつ CIP 法に適した格子形成方法を開発し、1次元の移流問題および2次元の流体問題を解いた。移流計算においては、解析解とよく一致した結果が得られ、開発した格子形成法による計算精度の向上が確認できた。また流体計算においては円柱周りの流れを良く再現でき、流体問題へソロバン格子が適用できることを確認した。

参考文献

- [1] F.Xiao, T.Yabe and T.Ito "Constructing Oscillation Preventing Scheme for the Advection Equation by a Rational Function", Comp.Phys.Comm.99pp.1-12, 1996
- [2] 棚橋隆彦, "流れの有限要素解析 I", 朝倉書店(1997)