

非定常三次元粘性流のCIP型有限要素法解析

CIP-Finite Element Analysis for Unsteady Three-Dimensional Viscous Fluid Flow

山田喜士, 信州大院, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: cslab18@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 松田安弘, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: matsuda@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 邵 長城, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: cslab01@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 吉野正人, 信州大工, 〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 Yoshihito Yamada, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan
 Yasuhiro Matsuda, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan
 Changcheng Shao, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan
 Masato Yoshino, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553, Japan

In this study, the CIP-finite element method (CIP-FEM) is proposed for the analysis of the unsteady three-dimensional viscous fluid flows. This method is a combination of the SIMPLER formulation and the CIP (Cubic Interpolated Propagation) method. The SIMPLER formulation is used to solve the coupled problem of velocity and pressure, and the CIP method is used to deal with the convection terms. The three-dimensional driven cavity flow problems are solved up to the Reynolds number of 3,200 with non-uniform meshes. The results agree well with those of other research works.

1. 緒言

我々の過去の研究において、ナビエ・ストークス方程式の離散化に関して速度と圧力の連成には SIMPLER 法⁽¹⁾のプロセスを、移流項の解析には CIP (Cubic Interpolated Propagation) 法⁽²⁾を取り入れた CIP 型有限要素法が、二次元粘性流の解析に対して有効であることが数値実験の結果から示されている⁽³⁾。

本研究はこの技法を非定常三次元粘性流の解析に適用したものである。計算例としては立方体キャビティ内粘性流れ問題を取り上げ、レイノルズ数 $Re=3,200$ までの数値計算を行った。そして他の研究例との比較を含め、その有効性について検討した。

2. 基礎式

基礎式として連続の式、ナビエ・ストークス方程式の無次元形を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ただし

$\mathbf{u}$: 速度ベクトル, p : (圧力 / 密度)

Re : レイノルズ数, t : 時間

である。

CIP 法での三次補間関数を求める際には速度の空間一階微分値が必要であるが、それらは式(2)の両辺をそれぞれ x, y, z 方向で微分することにより得られる次式によって支配される。

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_x = -(\mathbf{u}_x \cdot \nabla) u - \nabla p_x + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_x \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_y = -(\mathbf{u}_y \cdot \nabla) u - \nabla p_y + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_y \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -(\mathbf{u}_z \cdot \nabla) u - \nabla p_z + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_z \quad (5)$$

ただし

u_x, u_y, u_z : x, y, z 方向の速度微分値

p_x, p_y, p_z : x, y, z 方向の (圧力 / 密度) の微分値である。

3. CIP 型有限要素法による定式化

3.1. 擬似速度 $\bar{\mathbf{u}}$ と圧力の予測値 p^*

式(1)と式(2)を SIMPLER 法と同様の考え方で解く。すなわち式(2)の非定常項を $(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) / \Delta t$ で離散化すると次式を得る。

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \left[\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \right] \Delta t \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}} - \Delta t \cdot \nabla p^* \quad (7)$$

式(6)にガレルキン法を適用して擬似速度 $\bar{\mathbf{u}}$ を求める。また式(7)の両辺について発散をとり、式(1)を考慮して得られるポアソン方程式(式(8))にガレルキン法を適用して圧力の予測値 p^* を求める。

$$\nabla^2 p^* = (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) / \Delta t \quad (8)$$

3.2. 移流フェイズと非移流フェイズ

式(2), (3), (4), (5)を移流フェイズと非移流フェイズに分割すると次式が得られる。

移流フェイズ:

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{u}_x - u_x^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) u_x^n = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{u}_y - u_y^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) u_y^n = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{u}_z - u_z^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) u_z^n = 0 \quad (12)$$

非移流フェイズ：

$$\frac{\mathbf{u}^* - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \quad (13)$$

$$\frac{\mathbf{u}_x^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_x}{\Delta t} = -(\mathbf{u}_x^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nabla p_x^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_x^n \quad (14)$$

$$\frac{\mathbf{u}_y^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_y}{\Delta t} = -(\mathbf{u}_y^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nabla p_y^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_y^n \quad (15)$$

$$\frac{\mathbf{u}_z^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_z}{\Delta t} = -(\mathbf{u}_z^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nabla p_z^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_z^n \quad (16)$$

3.3. 速度および速度微分値の移流フェイズ

式(9)～(12)に CIP 法を適用する．この際，対象となる節点の上流側要素節点で与えられる速度と速度の微分値については，式(17)～(20)を用いて正規直交系に写像する．

$$\mathbf{u}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \mathbf{u}(x_i, y_i, z_i) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \quad (20)$$

次に，式(21)に示す三次補間関数を用いて上流側要素での速度分布を近似する．なお式(21)の $A_{\alpha\beta\gamma}$ は上流側要素節点での速度と速度の微分値から得られる係数である．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n(\xi, \eta, \zeta) = & A_{000} + A_{100}(\xi-1) + A_{200}(\xi-1)^2 + A_{300}(\xi-1)^3 \\ & + A_{010}(\eta-1) + A_{020}(\eta-1)^2 + A_{030}(\eta-1)^3 \\ & + A_{001}(\zeta-1) + A_{002}(\zeta-1)^2 + A_{003}(\zeta-1)^3 \\ & + A_{110}(\xi-1)(\eta-1) + A_{011}(\xi-1)(\zeta-1) \\ & + A_{011}(\eta-1)(\zeta-1) + A_{111}(\xi-1)(\eta-1)(\zeta-1) \\ & + A_{210}(\xi-1)^2(\eta-1) + A_{201}(\xi-1)^2(\zeta-1) \\ & + A_{120}(\xi-1)(\eta-1)^2 + A_{021}(\eta-1)^2(\zeta-1) \\ & + A_{102}(\xi-1)(\zeta-1)^2 + A_{012}(\eta-1)(\zeta-1)^2 \\ & + A_{310}(\xi-1)^3(\eta-1) + A_{301}(\xi-1)^3(\zeta-1) \\ & + A_{130}(\xi-1)(\eta-1)^3 + A_{031}(\eta-1)^3(\zeta-1) \\ & + A_{103}(\xi-1)(\zeta-1)^3 + A_{013}(\eta-1)(\zeta-1)^3 \\ & + A_{211}(\xi-1)^2(\eta-1)(\zeta-1) \\ & + A_{121}(\xi-1)(\eta-1)^2(\zeta-1) \\ & + A_{112}(\xi-1)(\eta-1)(\zeta-1)^2 \\ & + A_{311}(\xi-1)^3(\eta-1)(\zeta-1) \\ & + A_{131}(\xi-1)(\eta-1)^3(\zeta-1) \\ & + A_{113}(\xi-1)(\eta-1)(\zeta-1)^3 \end{aligned} \quad (21)$$

そして，式(22)～(25)から速度の中間値 $\tilde{\mathbf{u}}$ とその微分値 $\partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \xi, \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \eta, \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \zeta$ を求める．

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \mathbf{u}^n(\xi_s, \eta_s, \zeta_s) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \xi} \bigg|_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \bigg|_{\xi_s, \eta_s, \zeta_s}^n \quad (23)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} \bigg|_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \bigg|_{\xi_s, \eta_s, \zeta_s}^n \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \bigg|_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi_s, \eta_s, \zeta_s}^n \quad (25)$$

ただし

$$\xi_s, \eta_s, \zeta_s : x_s = x_i - u \Delta t, y_s = y_i - v \Delta t, z_s = z_i - w \Delta t$$

を x-y-z 座標系から正規直交系に写像した値

である．

次に正規直交系で求めた速度の中間値 $\tilde{\mathbf{u}}$ およびその微分値 $\partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \xi, \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \eta, \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \zeta$ を式(26)～(29)を用いて x-y-z 座標系に写像する．

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_i, y_i, z_i) = \tilde{\mathbf{u}}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial z} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \bigg|_{x_i, y_i, z_i} \quad (29)$$

3.4. 速度および速度微分値の非移流フェイズ

速度の非移流フェイズ(式(13))にガレルキン法を適用し，速度の予測値 $\mathbf{u}^*$ を求める．

$$\frac{[P]}{\Delta t} \{u\}^* = \frac{[P]}{\Delta t} \{\tilde{u}\} - [D]_1 \{u\}^n - \{F\}_1 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [P] &= \sum_1^M \int_{V^e} N_i N_j dx dy dz \\ [D]_1 &= \sum_1^M \int_{V^e} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \{F\}_1 &= \sum_1^M \int_{V^e} N_i (\nabla p^*) dx dy dz \end{aligned}$$

ただし

$$\Delta t : \text{タイム・ステップ}, \quad V^e : \text{一要素の領域}$$

$$M : \text{総節点数}, \quad N_i : \text{形状関数}$$

である．

圧力の修正量 $\delta p (= p^{n+1} - p^*)$ は式(31)にガレルキン法を適用して求める．

$$\nabla^2 (\delta p) = (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) / \Delta t \quad (31)$$

最後に，式(32)，(33)から次の時刻での速度 $\mathbf{u}^{n+1}$ ，圧力 p^{n+1} を得る．

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \cdot [\nabla(\delta p)] \quad (32)$$

$$p^{n+1} = p^* + \delta p \quad (33)$$

なお次の時刻の速度微分値を求めるためには，式(13)の $\mathbf{u}^*, p^*$ を $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ に置き換え，式(14)～(16)に代入すると次式が得られる．

$$\frac{\mathbf{u}_x^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_x}{\Delta t} = -\mathbf{u}_x^n \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\mathbf{u}_y^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_y}{\Delta t} = -\mathbf{u}_y^n \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\mathbf{u}_z^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_z}{\Delta t} = -\mathbf{u}_z^n \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad (36)$$

そして、式(34)～(36)にガレルキン法を適用し既知の $\mathbf{u}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}$ を右辺に代入すると、次の時刻における速度微分値を求めることができる。

$$\frac{[P]}{\Delta t} \{u_x\}^{n+1} = \frac{[P]}{\Delta t} \{\tilde{u}_x\} + \{F\}_2 \quad (37)$$

$$\frac{[P]}{\Delta t} \{u_y\}^{n+1} = \frac{[P]}{\Delta t} \{\tilde{u}_y\} + \{F\}_3 \quad (38)$$

$$\frac{[P]}{\Delta t} \{u_z\}^{n+1} = \frac{[P]}{\Delta t} \{\tilde{u}_z\} + \{F\}_4 \quad (39)$$

$$\{F\}_2 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i \left\{ -\langle u_x \rangle_e \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_3 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i \left\{ -\langle u_y \rangle_e \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_4 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i \left\{ -\langle u_z \rangle_e \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \right\} dx dy dz$$

ただし

$\langle u_x \rangle_e, \langle u_y \rangle_e, \langle u_z \rangle_e$: 速度微分値の要素平均量

である。

4. 数値計算例

図1に立方体キャビティ内粘性流れ解析の計算領域を、図2に計算領域のメッシュ分割図例を示す。計算領域は式(40)により不等長メッシュで分割する。

$$\begin{cases} x_i = \frac{\exp\{a(i-1)dx\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} & (x \leq 0.5) \\ x_i = \frac{\exp\{a[1-(i-1)]dx\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} & (x \geq 0.5) \end{cases} \quad (40)$$

ただし、 $a=3$ 、 $dx=2/N$ (N : 一辺の分割数) である。

また計算条件は以下の通りである。

(1)初期条件

キャビティ内で、

速度 : $u=0, v=0, w=0$

速度微分値 : $u_x=u_y=u_z=0$

$$u_x=u_y=u_z=0$$

$$u_x=u_y=u_z=0$$

圧力 : $p=0$

(2)境界条件

速度 :

面 DHGC で $u=1, v=0, w=0$

その他の面で $u=0, v=0, w=0$

圧力 :

すべての面で $\partial p / \partial n = 0$ (ただし、 $\partial / \partial n$ は法線方向の微分である)

また次式を満足するまで計算を繰り返した。

$|\mathbf{u}_i^n| \geq \text{Max} |\mathbf{u}_i^n| \times 0.01$ に対して、

$$\delta = \text{Max} \left| \frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_i^{n-1}}{\mathbf{u}_i^n} \right| \times 100 \leq 0.1 (\%) \quad (41)$$

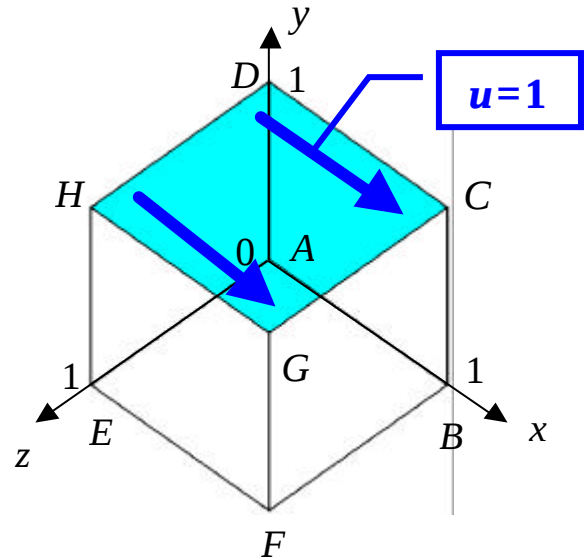


Fig. 1 Computational domain

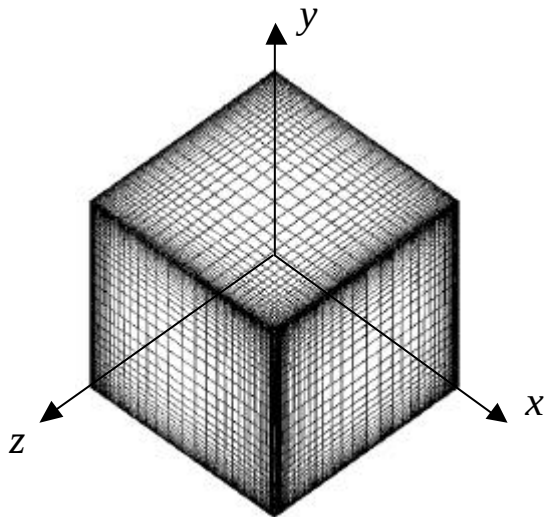


Fig. 2 Non-uniform meshes (40 x 40 x 40)

4. 計算結果

立方体キャビティ内粘性流れ問題の解析は数値解析技法の有効性を検証するための典型的な問題である．本研究ではレイノルズ数 $Re=400, 1,000, 2,000, 3,200$ の場合について静止状態からの計算を行った．表 1 に各計算パラメータを示す．ここで $b_{max} (=1 \times \Delta t / h_{min})$, h_{min} : 最小格子間距離) は最大クーラン数である．

4. 1. レイノルズ数 $Re=400 \sim 2,000$ での計算

図 3 は $Re=400$ での x - y 断面上($z=0.5$)の速度分布図である．比較のために本田ら⁽⁴⁾および松田ら⁽⁵⁾の結果と共に示す．ただし本田らの結果は対象条件を付した半領域での計算結果である．これより本技法の結果は本田らや松田らの結果とほぼ同様であることが確認できる．また図 4 に $Re=400$ における各断面での圧力分布図を示す．ここでは若干の違いが見られる．

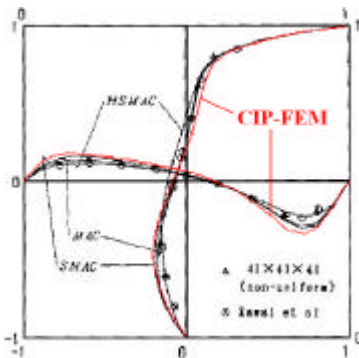
図 5 には $Re=1,000$ における x - y 断面上($z=0.5$)での速度分布図である．同時に松田ら⁽⁵⁾、河合ら⁽⁶⁾や Ku ら⁽⁷⁾の結果を含めて比較したが、ほぼ同様の結果が得られている．図 6 は $Re=1,000$ における x - y 断面上($z=0.5$)での速度ベクトル図と圧力分布図である．比較のために松本ら⁽⁸⁾による結果と共に示す．文献⁽⁸⁾では等圧線間隔が報告されていないため厳密な比較はできないが、全体のパターンとしては比較的似通った結

果が得られた．また図 7, 8 は $Re=1,000$ における z - y 断面上($x=0.5$)および z - x 断面上($y=0.5$)での速度ベクトル図である．ただし、本解法の結果は境界付近における速度の急激な変化を明確に捉えている．これは本解法で用いたメッシュが境界付近で十分に細かいためと思われる．また圧力分布図では本解法の結果は松田らよりも圧力差が小さくなっている．この傾向は $Re=400, 1,000$ でも同様であった．これは本解法自体の影響と考えられるが、より詳しい検討が必要であろう．図 10, 11 より、 z - x 断面上および z - y 断面上で流れの対称性が確認できる．図 12 は $Re=2,000$ での相対速度変化率 δ であるが、振動を伴うものの、その値は計算を繰り返す毎に小さくなっており、定常解が得られているものと考えられる．なお松田らや松本らの結果でも $Re=2,000$ で定常解の報告がある．

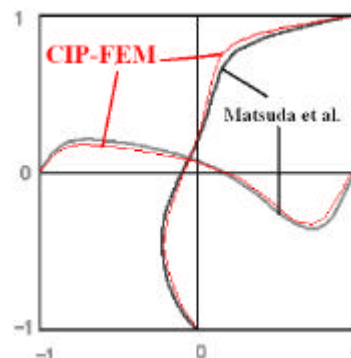
図 9, 10, 11 は $Re=2,000$ での速度ベクトル図および圧力分布図を松田ら⁽⁵⁾の結果と共に示す．ただし、 z - x 断面上($y=0.5$)と z - y 断面上($x=0.5$)での速度ベクトルは x - y 断面上($z=0.5$)の 10 倍スケールで描かれている(松本らの文献では報告がないため比較していない)．速度ベクトル図では、本解法の結果は境界付近における速度の急激な変化を明確に捉えている．これは本解法で用いたメッシュが境界付近で十分に細かいためと思われる．また圧力分布図では本解法の結果は松田らよりも圧力差が小さくなっている．この傾向は $Re=400, 1,000$ でも同様であった．これは本解法自体の影響と考えられるが、より詳しい検討が必要であろう．図 10, 11 より、 z - x 断面上および z - y 断面上で流れの対称性が確認できる．図 12 は $Re=2,000$ での相対速度変化率 δ であるが、振動を伴うものの、その値は計算を繰り返す毎に小さくなっており、定常解が得られているものと考えられる．なお松田らや松本らの結果でも $Re=2,000$ で定常解の報告がある．

Table 1 Computational parameters and results ($Re=400, 1,000, 2,000, 3,200$)

Re	Method	Mesheres	Δt	Loop	b_{max}	Fig.
400	CIP-FEM	$20 \times 20 \times 20$	1.0×10^{-2}	1,590	1.09	3(a), 3(b), 4(a)
	Honda et al. ⁽⁴⁾	$20 \times 20 \times 10$ (Uniform meshes)	1.5×10^{-2}	2,139	0.30	3(a), 4(b)
	Matsuda et al. ⁽⁵⁾	$30 \times 30 \times 30$	8.0×10^{-2}	270	7.17	3(b)
1,000	CIP-FEM	$30 \times 30 \times 30$	5.0×10^{-3}	4,202	0.86	5(a), 5(b), 6(a), 7(a), 8(a)
	Kawai et al. ⁽⁶⁾	$30 \times 30 \times 30$ (Uniform meshes)	$1.0 \times 10^{-3} \sim 5.0 \times 10^{-3}$	—	0.15	5(b)
		$30 \times 30 \times 15$	$1.0 \times 10^{-3} \sim 5.0 \times 10^{-3}$	—	0.45	5(b)
	Ku et al. ⁽⁷⁾	$30 \times 30 \times 15$	5.0×10^{-4}	—	—	5(b)
	Matsuda et al. ⁽⁵⁾	$30 \times 30 \times 30$	4.0×10^{-2}	918	2.69	5(a)
	Matsumoto et al. ⁽⁸⁾	$30 \times 30 \times 30$	1.0×10^{-2}	—	0.67	6(b), 7(b), 8(b)
2,000	CIP-FEM	$40 \times 40 \times 40$	4.0×10^{-3}	29,994	0.94	9(a), 10(a), 11(a), 12
	Matsuda et al. ⁽⁵⁾	$40 \times 40 \times 40$	2.0×10^{-2}	6,202	2.43	9(b), 10(b), 11(b)
	Matsumoto et al. ⁽⁸⁾	$30 \times 30 \times 30$	1.0×10^{-2}	—	0.67	—
3,200	CIP-FEM	$40 \times 40 \times 40$	4.0×10^{-3}	30,000	0.94	13(a), 14(a), 15(a), 16,17,18
	Kawai et al. ⁽⁶⁾	$40 \times 40 \times 20$	$1.0 \times 10^{-3} \sim 5.0 \times 10^{-3}$	—	0.13	13(b), 14(b), 15(b), 17
	Matsuda et al. ⁽⁵⁾	$40 \times 40 \times 40$	1.0×10^{-2}	20,000	0.86	—
	Matsumoto et al. ⁽⁸⁾	$30 \times 30 \times 30$	1.0×10^{-2}	—	0.67	—



(a) CIP-FEM and Honda et al. ⁽⁴⁾



(b) CIP-FEM and Matsuda et al. ⁽⁵⁾

Fig 3 Velocity distributions at $z=0.5$ ($Re=400$)

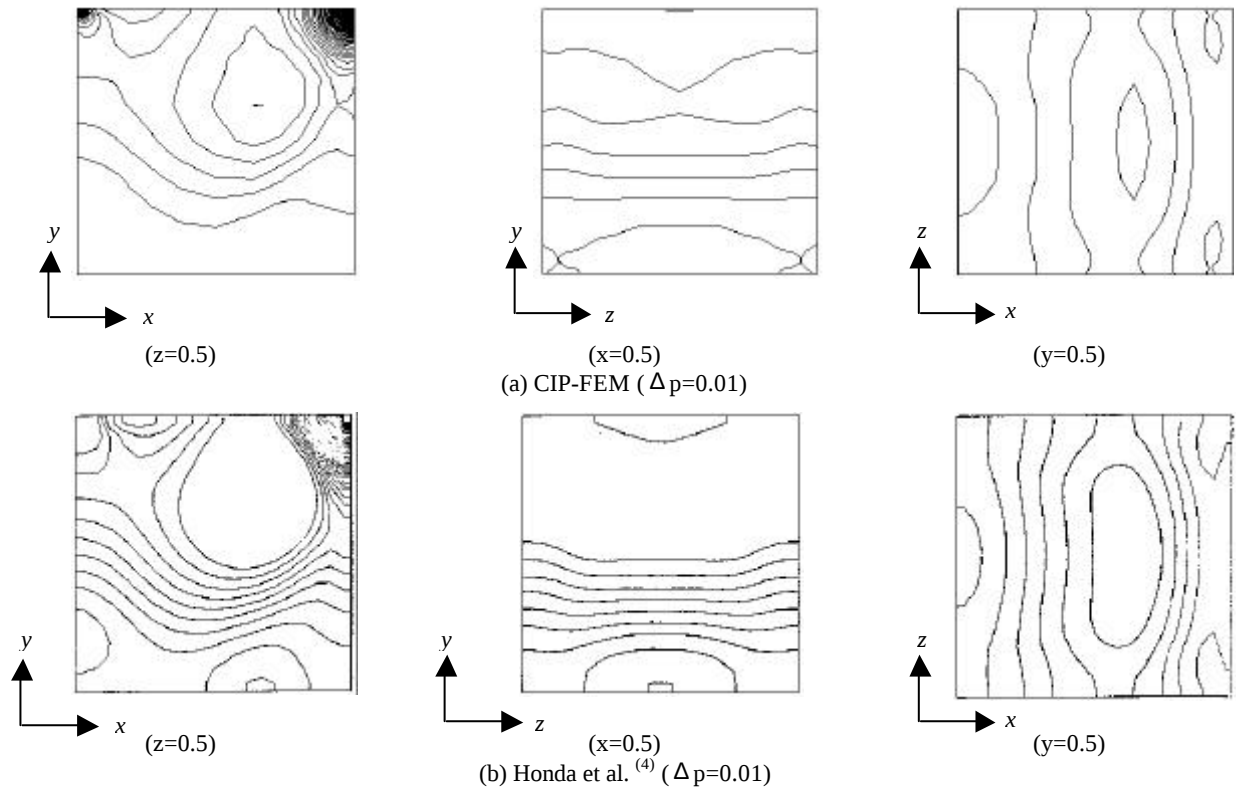


Fig.4 Pressure contours (Re=400)

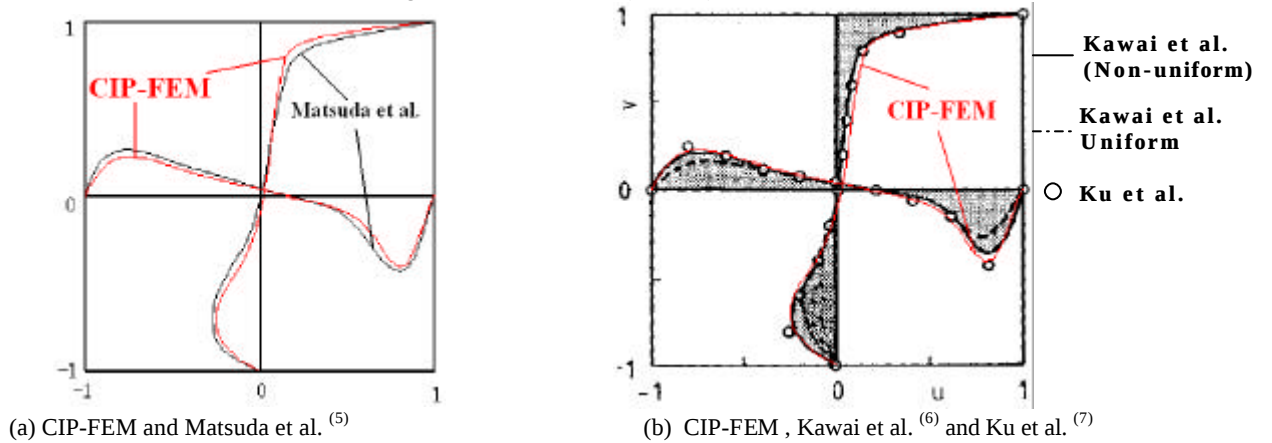


Fig 5 Velocity distributions at $z=0.5$ (Re=1,000)

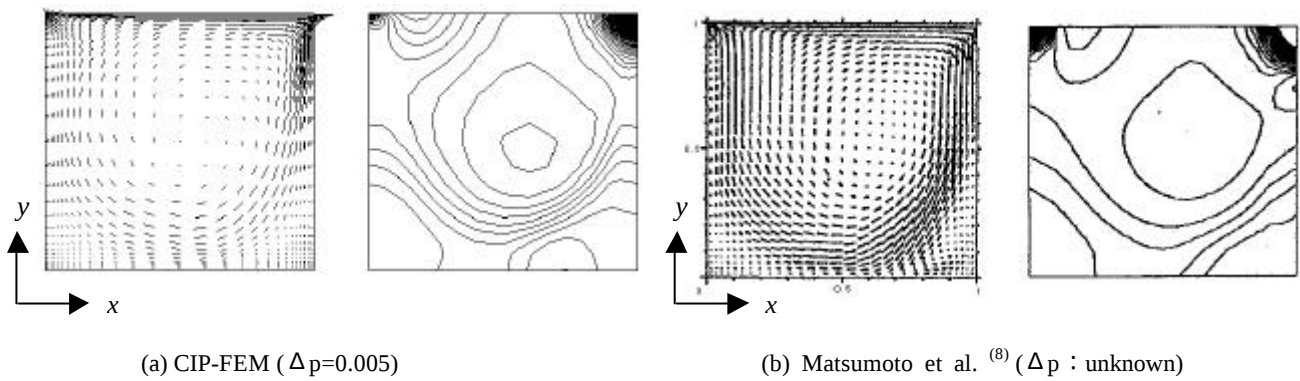


Fig.6 Velocity distributions and pressure contours at $z=0.5$

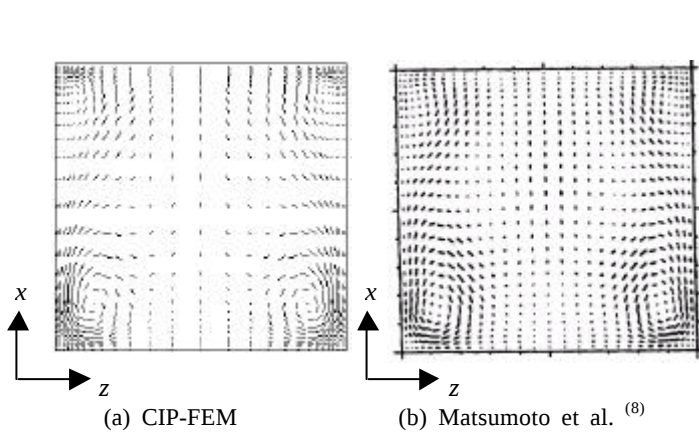


Fig. 7 Velocity vectors at $x=0.5$ ($Re=1,000$)

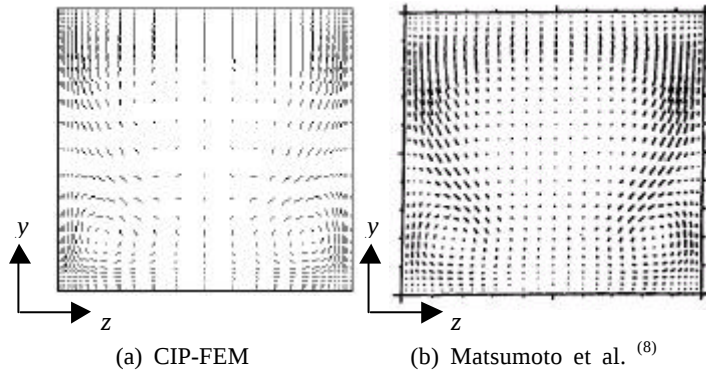


Fig. 8 Velocity vectors at $y=0.5$ ($Re=1,000$)

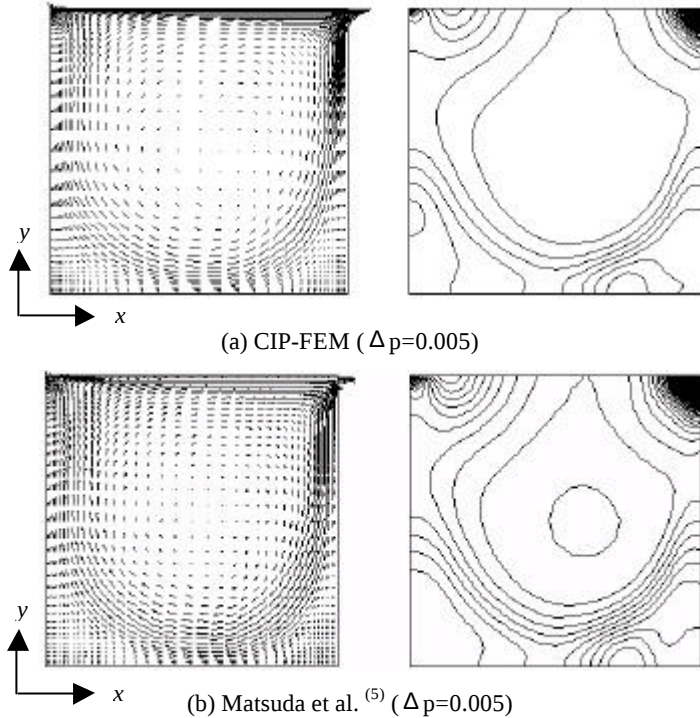


Fig. 9 Velocity vectors and pressure contours at $z=0.5$ ($Re=2,000$)

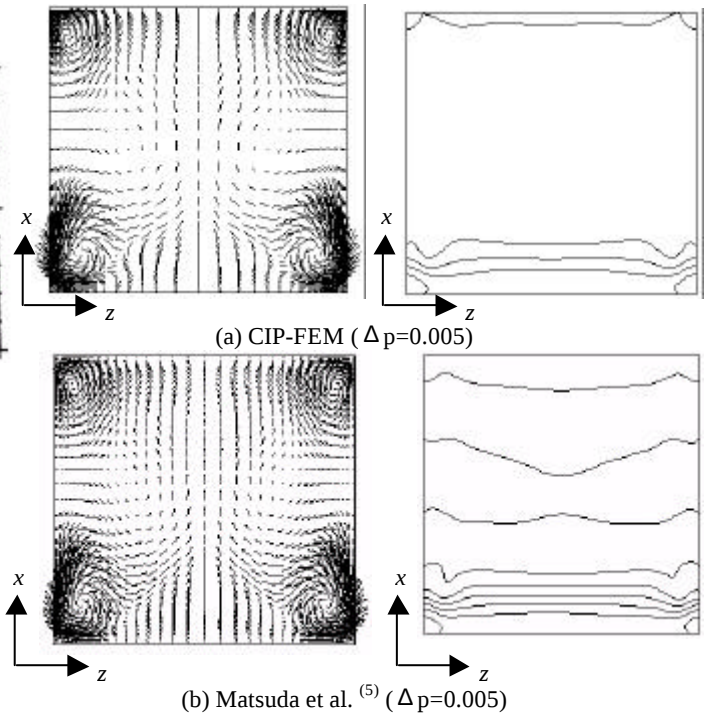


Fig. 10 Velocity vectors and pressure contours at $x=0.5$ ($Re=2,000$)

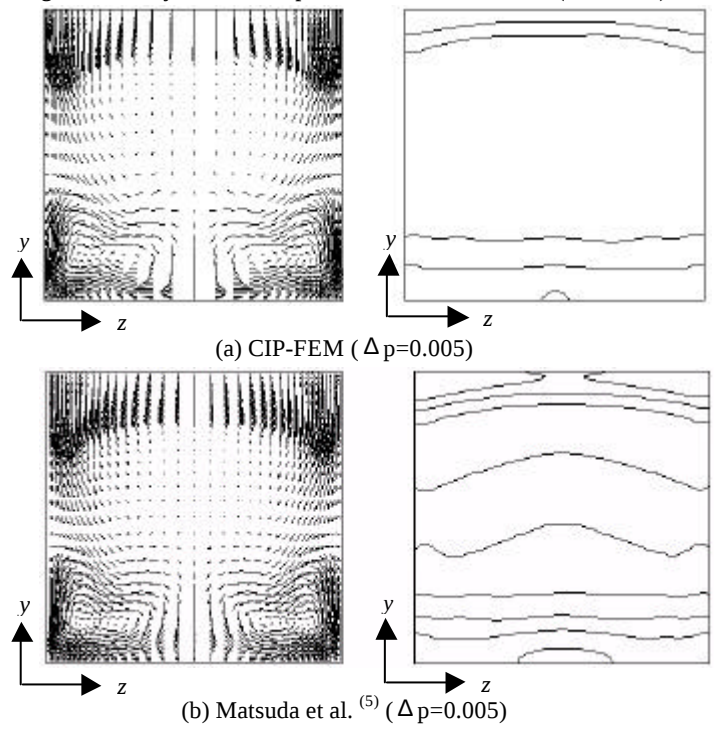


Fig. 11 Velocity vectors and pressure contours at $x=0.5$ ($Re=2,000$)

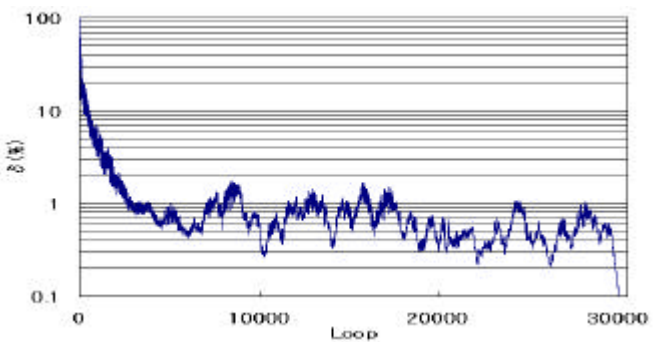


Fig. 12 Convergence histories of " δ " ($Re=2,000$)

4. 2. レイノルズ数 $Re=3,200$ の解析

本解法により $Re=3,200$ の解析をループ数 30,000 まで行ったが、他の研究例と同様に流れの非定常性が現れた。図 13, 14, 15 には Loop=30,000 での各断面における速度ベクトル図を河合ら⁽⁶⁾の結果と共に示す。ただし z - y 断面上($x=0.5$)および z - x 断面上($y=0.5$)の速度ベクトルは x - y 断面上($z=0.5$)の 2 倍のスケールで描かれている。これより z - x 断面上($y=0.5$)の速度ベクトルでは対称面において Taylor - Görtler 状の縦渦が確認できる。この現象は河合らや松田ら⁽⁵⁾の結果においても確認できる。図 16 に速度分布図を河合ら⁽⁸⁾の結果と共に示す。ただし本解法の結果は Loop=24,000, 26,000, 28,000, 30,000 の平均値として描いたものであるが、ほぼ同様の結果が得られている。図 17 に $x=0.777$ 断面および $y=0.022$ 断面での速度ベクトル図の様子を示すが、図 17(a)の下流域では Taylor - Görtler 状の渦が明瞭に確認できる。図 17(b)では湧き出し・吸い込みのような現象が確認できるが、この現象は河合ら、松田らや松本ら⁽⁸⁾の結果でも生じている。図 18 に相対速度変化率の変化を示す。 δ は 1~2%付近で振動しており、流れの非定常性が確認できる。

5. 結 論

非定常三次元粘性流れ問題に対し SIMPLER 法概念を取り入れた有限要素法に CIP 法を取り込んだ CIP 型有限要素法を適用した。そして立方体キャビティ内粘性流れ解析を行なった結果、以下の結論を得た。

- (1) レイノルズ数 $Re=400 \sim 2,000$ の解析を行った結果、定常解が得られ、速度場については他の研究例とほぼ同様の結果が得られることを確認した。
- (2) $Re=3,200$ の場合には他の研究例と同様の構造を有する非定常流れとなることを確認した。これより本解法の基本的な有効性を確認した。
- (3) なお計算時間は我々の研究室での有限要素解法に比べて 1.5~2.0 倍程度であった。

参考文献

- (1) Patankar, S.V. 原著, 水谷・香月訳, コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, (1985), 森北出版。
- (2) Yabe, T. and Aoki, T., Comp. Phys. Comm. 66, (1991), 219.
- (3) 山田・他 3 名, 第 14 回数値流体力学シンポジウム CD-ROM 講演論文集, (2000)。
- (4) 本田・他 3 名, 日本機械学会論文集 (B 編), 57-540, (1989), 2627.
- (5) 松田・他 4 名, 日本機械学会論文集 (B 編), 66-641, (2000), 17.
- (6) 河合・他 2 名, 日本機械学会論文集 (B 編), 55-515, (1989), 1922.
- (7) Ku, H. C., 他 2 名, J. Comp. Phys., 70, (1987), 439.
- (8) 松本・他 2 名, 日本機械学会論文集 (B 編), 62-601, (1996), 3265.

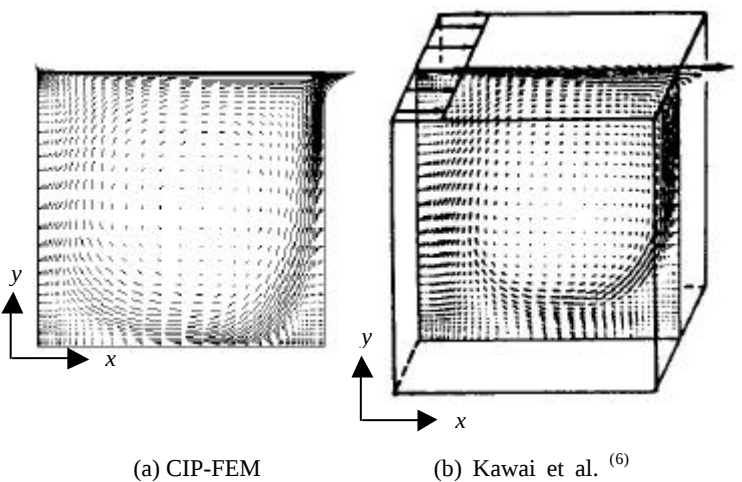


Fig. 13 Velocity vectors at $z=0.5$ ($Re=3,200$, Loop=30,000)

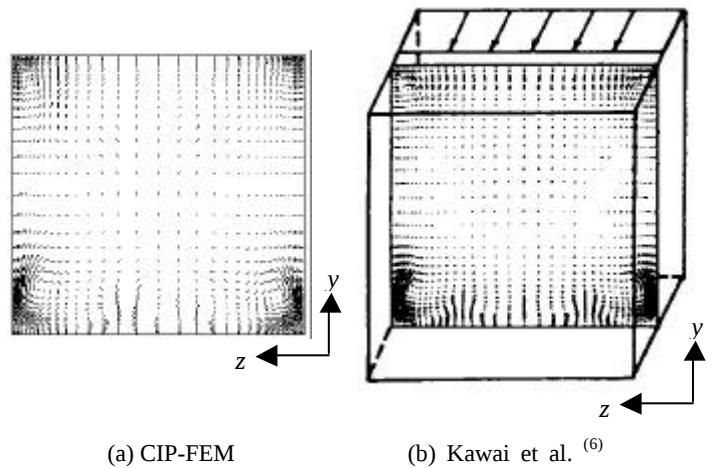


Fig. 14 Velocity vectors at $x=0.5$ ($Re=3,200$, Loop=30,000)

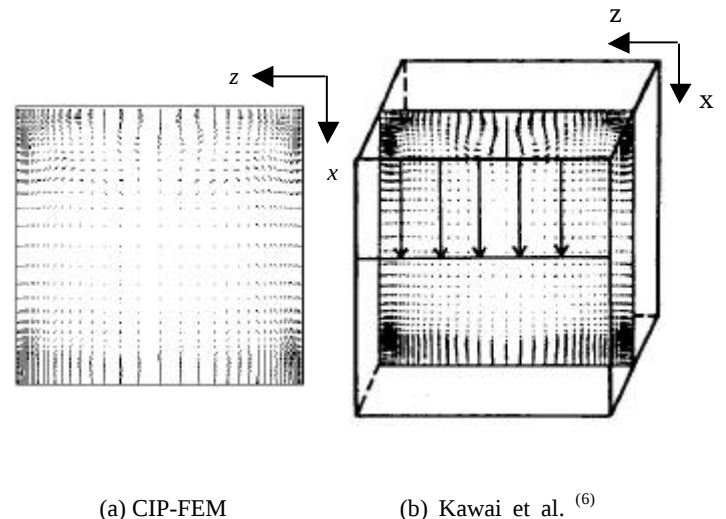


Fig. 15 Velocity vectors at $y=0.5$ ($Re=3,200$, Loop=30,000)

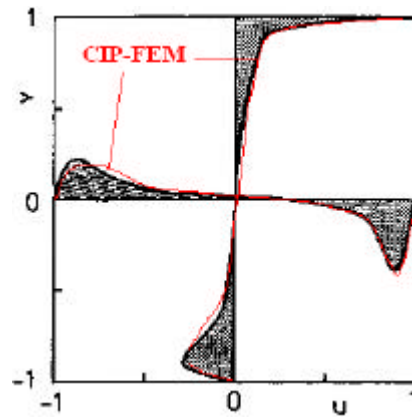
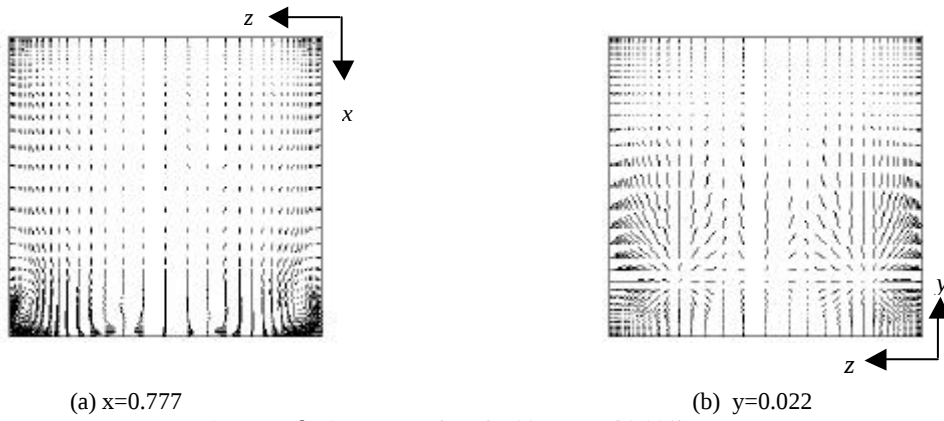


Fig. 16 Velocity distributions at $z=0.5$ ($Re=3,200$, $Loop=30,000$)



(a) $x=0.777$

(b) $y=0.022$

Fig. 17 Velocity vectors ($Re=3,200$, $Loop=30,000$)

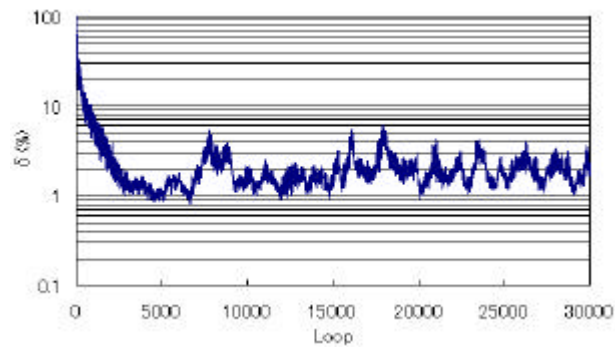


Fig. 18 Convergence histories of “ δ ” ($Re=3,200$)