

Hybrid-cubic-rational 関数による保存型および非保存型 semi-Lagrangian 法 Conservative and non-conservative semi-Lagrangian methods using hybrid-cubic-rational interpolation function

井田真人, 群馬大 SVB 研, 〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: ida@vbl.gunma-u.ac.jp
Masato Ida, Satellite Venture Business Laboratory, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma 376-8515, Japan

Semi-Lagrangian methods in a conservative and a non-conservative form using the hybrid-cubic-rational interpolation function are proposed. In the present method, the cubic polynomial and a rational function, used for interpolation, are mixed in the optimal ratio determined theoretically to achieve both high accuracy and convexity preserving of solution. The accuracy and robustness of the present methods are demonstrated by some test problems.

1. はじめに

90 年代半ば以降, semi-Lagrangian (SL) 法の保存型スキームへの改変が幾つかの研究グループによって行われてきている⁽¹⁻⁴⁾. 例えば Leonard⁽¹⁾や Manson ら⁽²⁾は QUICKEST スキームを改変することで質量保存を満たす SL 法を提案している。

本論文の目的は, Tanaka^(3,4)らが提案した CIP 法に基づく保存型 SL 法を, そこで用いられる補間関数を改変することで無振動かつ高解像度な解を供給するスキームへ作り変えることにある。よく知られているように, CIP のような古典的高次多項式 (CIP では 3 次多項式が用いられる) を用いたスキームによる解は振動的になり易い。この問題を解決するために有理関数の利用⁽⁵⁾も検討されているが, こちらは若干拡散的になり過ぎるようである。次の章では 3 次多項式とその有理関数を併用した補間関数を提案する。この関数は 3 次多項式とは違って数値振動を起こすことがなく, かつ有理関数より高い解像度の解を供給する。

2. Hybrid-cubic-rational (HCR) 補間関数

最近, 著者は 3 次多項式と有理関数を併用した無振動高精度補間関数, hybrid-cubic-rational (HCR) 補間関数を提案した⁽⁶⁾ :

$$F(X) = \alpha R(X) + (1 - \alpha)C(X)$$

ここで R は有理関数法⁽⁵⁾で用いられる有理関数 :

$$R(k) = f_i + d_i h k + \frac{P_i^2 k^2}{Q_i + (P_i - Q_i)k},$$

C は CIP 法の三次多項式 :

$$C(k) = f_i + d_i h k + (2P_i - Q_i)k^2 + (Q_i - P_i)k^3,$$

f_i は従属変数の値, $d_i = \partial_x f_i$,

$$P_i = (S_{i+1/2} - d_i)h,$$

$$Q_i = (d_{i+1} - S_{i+1/2})h,$$

$$S_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i)/h,$$

X は空間座標を表し, α は両関数を重み付け平均するパラメータ, h は計算格子幅, k はローカルの CFL 数を表す。 R のみを用いて得られた解はその凹凸性が保存されることが保証されているが, 拡散的になり過ぎる傾向がある。 C を用いて得られた解は高解像度であるが, 数値振動が現れやすい。これらの問題を解決し, 両関数の良い点のみを生かした手法を提案すべく, HCR 関数法では α を数学的に得られた最適値に設定する。最適化に用いる条件の一つに, 凹凸性保存条件⁽⁵⁾を選ぶ。その条件は次のように表すことができる :

「区間 $X \in [x_i, x_{i+1}]$ 内で, 凹のデータ ($d_i < S_{i+1/2} < d_{i+1}$) に対して $F_{xx}(X) > 0$ が, 凸のデータ ($d_i > S_{i+1/2} > d_{i+1}$) に対して

$F_{xx}(X) < 0$ が成り立つ。」

もう一つ用いる条件は,

「 R の支配性をできるだけ下げて高解像度解を得るために, 凹凸性保存条件を満たす α のうちの最小値を用いる⁽⁶⁾」
というものである。このような条件下で α を求めると以下のようになる⁽⁶⁾。

$$\alpha_i = \frac{M_i(M_i - 2)}{M_i(M_i - 2) + 1},$$

ここで,

$$M_i = \max \left[2, \max \left(\frac{Q_i}{P_i}, \frac{P_i}{Q_i} \right) \right]$$

である。数学的証明については文献(6)を参照されたい。

3. 保存型スキームへ

HCR 補間関数は CIP で用いられる 3 次多項式と同様, 従属変数の値と微係数を用いたものである。したがって文献(4)で示されるのと同様の方法で保存型スキームへ作り変えることができる。基本的には以下の置き換えを行うだけでよい^(4,7)。

$$f_i \rightarrow D_i = \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad (1)$$

$$d_i \rightarrow f_i. \quad (2)$$

つまり, 従属変数それぞれを一度空間積分した量に置き換える。(ただし, 非移流項が存在する場合にはその分の計算を加える必要がある。)

4. 計算例

以上のようにして得た補間関数を用いて対流方程式 :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を解いたときの結果を幾つか紹介する。

図 1 と図 2 に示したのは実線のプロファイルを一定速度で対流させたときの結果である (図 1 が非保存型, 図 2 が保存型による。また, この例題は文献(5)中で用いられたものと同じものである)。ここで Mod. Rat. とは有理関数法に文献(8)で提示された修正を加えたものである (この修正が有理関数法の凹凸性保存を崩す場合があることが指摘されている^(6,7))。HCR 関数法による結果は非保存型か保存型かによらず凹凸性が保存される。有理関数法によるものも同様であるが, より拡散的になる。Mod. Rat. によるものは非保存型の場合にはわずかにオーバーシュート, アンダーシュートが現れる程度であるが, 保存型にすると矩形波の頂上周辺で大きなオーバーシュートが現れるようになる。また, 興味深いことに HCR 関数を用いた場合には保存型にすることで矩形波に対する精

度が上がるようである⁽⁷⁾。文献(3)と(4)でも指摘されているとおり、CIP は保存・非保存に関わらずほとんど同じ解を供給する。

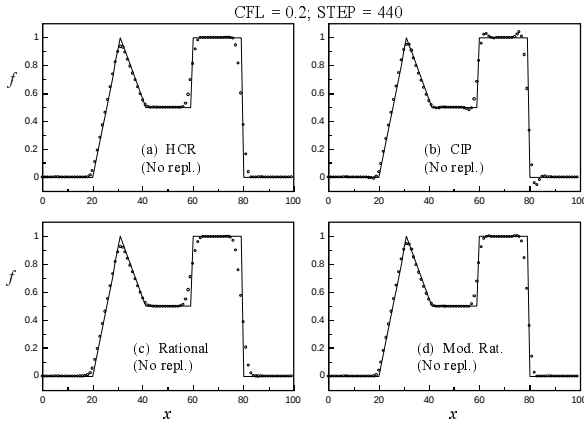


Fig. 1 Linear advection using the non-conservative schemes with CFL = 0.2 at step number = 440.

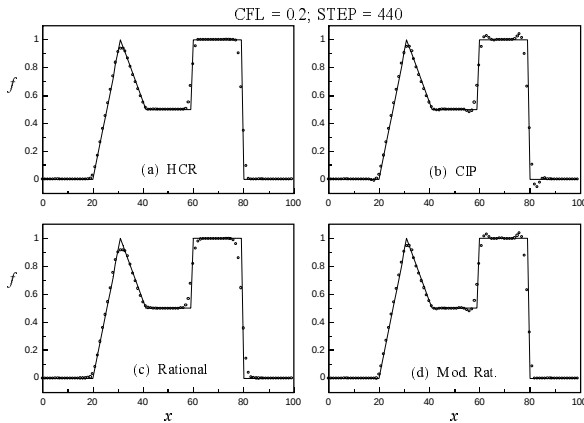


Fig. 2 Same as Fig. 1 but using the conservative schemes.

図3と図4に示したのは、実線の矩形波（幅わずか $9h$ ）2つを一定速度で対流させた場合の結果である。ここでもやはり保存型にすることで HCR 関数法の精度が上がっているように見える。（精度や凹凸性保存に関するより詳しい議論については文献(6, 7)を参照されたい。）

最後に保存型 HCR 関数法によって非粘性 Burgers 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を解いたときの結果を紹介する。初期条件は

$$G(x) = 0.5 + 0.4 \cos(2\pi x / 100),$$

パラメータは $h=1$ および $\Delta t=0.1$ とする。図5に $t=100$ の解を示した。実線は $h=1/5$ 、 $\Delta t=0.1/5$ として1次精度風上差分によって得た解である。この結果から HCR 関数法が変数変換(1)と(2)によって保存性を勝ち取ったことがはっきり分かる。解の凹凸性保存について調べるため、図6に保存型 HCR、保存型 CIP、非保存型 HCR 法によって同例題を解いた際の解の空間的な最大値と最小値を時間の関数として示した。実線は1次精度風上差分による解である。CIP による解には大きな数値振動が現れるが、HCR 法によるものには現れない。この結果は、たとえ保存型に修正されても HCR 法の凹凸性保存性は崩れないということを意味している。

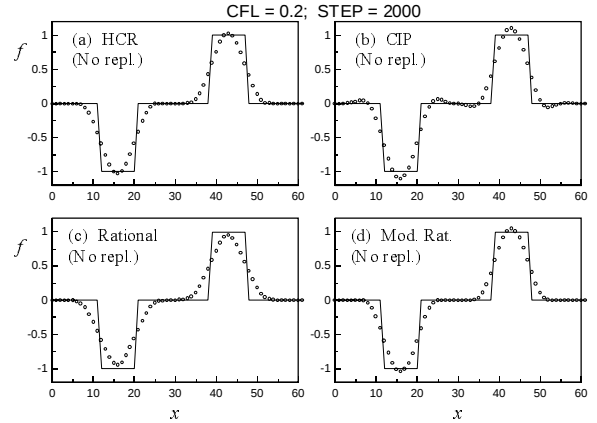


Fig. 3 Linear propagation of squares using the non-conservative schemes with CFL = 0.2 at step number = 2000.

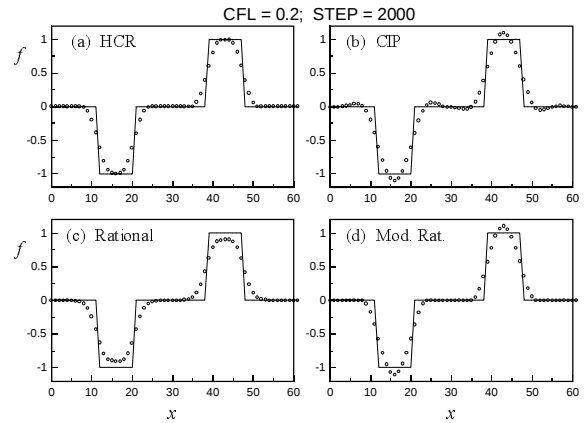


Fig. 4 Same as Fig. 3 but using the conservative schemes.

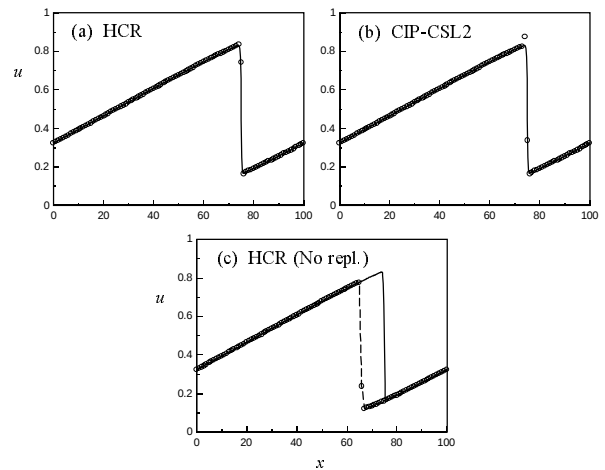


Fig. 5 Nonlinear propagation of a sinusoidal wave using (a): the conservative HCR, (b): the conservative CIP, and (c): the non-conservative HCR methods, with $\Delta t = 0.1$ at $t = 100$. The solid lines show the results given by using the first-order upwind method with $h = 1/5$ and $\Delta t = 0.1/5$.

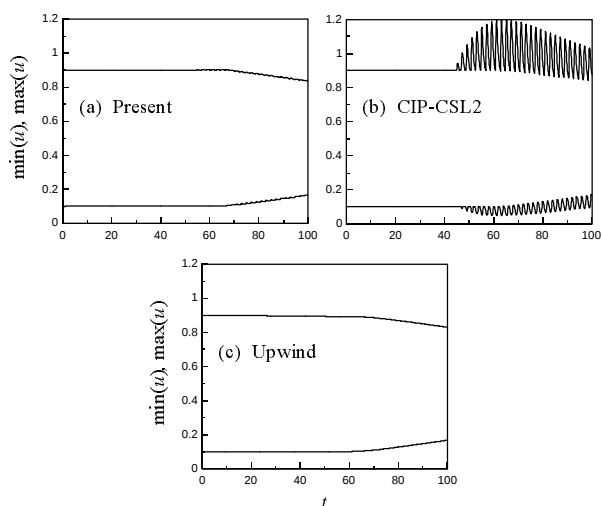


Fig. 6. Maximum and minimum values in the results for the nonlinear propagation, as functions of time.

5. 応用計画

最近我々は微小気泡間の音響的相互作用について理論的・数值的に議論し、すでに幾つかの新しい知見を得ている（例えば文献(9-11)）。そこで用いている直接数値シミュレーション技術⁽¹²⁻¹³⁾に今回提案した手法を組み入れ、数値解の精度や安定性を高めることでより詳細な数値的検討を行っていく予定である。

参考文献

- (1) B. P. Leonard *et al.*, Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow 5 (1995) 341.
- (2) J. R. Manson, S. G. Wallis, Adv. Env. Res. 1 (1997) 98.
- (3) R. Tanaka *et al.*, Comput. Phys. Commun. 126 (2000) 232.
- (4) T. Yabe *et al.*, Mon. Wea. Rev. 129 (2001) 332.
- (5) F. Xiao *et al.*, Comput. Phys. Commun. 93 (1996) 1.
- (6) M. Ida, Comput. Fluid Dyn. J. 10 (2001) 159.
- (7) M. Ida, Comput. Phys. Commun. (in print).
- (8) F. Xiao *et al.*, Comput. Phys. Commun. 94 (1996) 103.
- (9) M. Ida, 複数の論文を投稿中。
- (10) 井田他, 日超医 基礎技術研究会資料, 101-2, (2001) 17.
- (11) 井田, 第 10 回ソノケミストリー討論会 講演論文集, (2001) 16.
- (12) M. Ida and Y. Yamakoshi, Jpn. J. Appl. Phys. 40, (2001) 3846.
- (13) M. Ida, Comput. Phys. Commun. 132 (2000) 44.