

IDO-AMR 法による数値流体計算スキームの開発

Development of IDO-AMR Scheme

- 西田青示, 東京工業大学大学院創造エネルギー専攻 〒 152-8522 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:01m3136@es.titech.ac.jp
青木尊之, 東京工業大学学術国際情報センター, 〒 152-8522 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:taoki@nr.titech.ac.jp
Seiji NISHITA, Dept. of Energy Science, Tokyo Inst. of Tech., 2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8522
Takayuki AOKI, Global Scientific Information Computing Center,
Tokyo Inst. of Tech., 2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8522

We applied Interpolated Differential Operator (IDO) scheme to Adaptive Mesh Refinement (AMR) methods. We examine the Doswell's benchmark test (frontogenesis) and the Rayleigh-Taylor instability and estimate the mass conservation in converging and rotational velocity fields as benchmark tests, and obtain good results.

1. はじめに

複雑境界を含む問題を正確に解くためには、複雑境界を表現できるだけの高解像度の格子が必要である。また、複雑境界を含む物体周りの流体計算はその形状に影響をうけてさらに複雑な流れになる。そのような問題を低解像度で計算するのは非常に困難である。

また爆破シミュレーションのように爆発初期から爆発の影響が広範囲に広がる爆発後期まで、すべての時間で高精度に計算を行うことも非常に困難である。爆発の初期段階では爆発物の周りに焦点をあわせた格子を作成する必要があるため、格子間隔は自然と数 mm になる。しかし、爆発が進むにつれて影響範囲が大きくなるので全体の範囲は数 m に大きくなる。つまり、初期段階から後期段階までに 10^6 倍近くの必要な解像度の変化を生じる。それらを同じ格子で精度良く解くのは非常に困難である。

そこで、Berger らによって提唱された、高解像度が必要なおとこには必要なだけ格子を生成する解適合格子生成手法 (AMR 法) が有効であると考えられる。AMR 法を用いて局所的に格子を生成することより、複雑境界に格子を集中させたり、爆発によって生じる衝撃波面に格子を集中させたりすることで、上で述べた問題を解決することができる。また、局所的に格子を細分化することで全体を細分化した場合よりも計算資源を有効に使うことが可能になる。

本研究は、先に述べた AMR 法に、エルミート補間を用い、コンパクトで非等間隔でも精度が良い局所補間微分オペレータ法 (IDO 法) を適用させることを検討し、2次元での研究を行った。

2. AMR 法

ここで扱う AMR 法の特徴として、

- ・直交格子
- ・任意の箇所の格子を2分の1ずつ細分化
- ・細分化した格子をさらに細分化することが可能
- ・計算途中で格子を生成、削除することが可能

があげられる。直交格子型を採用する理由は、第一に格子を曲げてしまう境界適合法などの手法では計算負荷が重くなるに加えて、格子点で計算の際に座標変換をしないくはならないので求められた解が格子の形によるものが多くなってしまふ。また、複雑な形状になった場合、特異点が発生し計算することができなくなってしまったため、複雑な形状を扱うことを主幹に置いた本研究目的と異なるからである。

AMR 法で重要になる問題として、

- ・新しく格子を生成した際に、その格子点上の物理量を以前から存在する格子点から補間して求めなければならない。

- ・隣り合う格子の細かさが異なる箇所が生じ、その結果格子間隔が非等間隔になる。
- ・隣の格子点が存在しない格子点が生じる。

などの問題があげられる。隣の格子点が存在しない場合は、隣接する格子点から物理量を補間して求めてから計算する必要があり、補間する物理量の精度が流体計算の精度に大きな影響を与えることは避けられない。Fig. 1 に示す通り、隣の格子点もなく、さらに非等間隔であるような格子点がでてくる。AMR 法ではこのような格子点でも計算する必要がある。

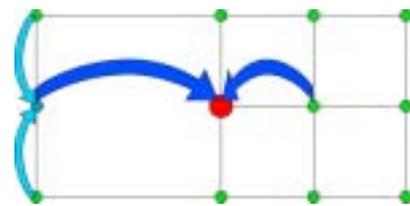


Fig. 1:

3. IDO 法

そこで、エルミート補間を用いたスキームである IDO 法を用いることを検討した。IDO 法では各グリッドに物理量とその空間1階微係数を与え、それらの値を用いてエルミート補間を用いて補間関数をつくる。物理量の微係数はその補間式を微分したものをを用いて値を求め、求めた微係数をもとに、テーラー展開を用いて時間発展させて計算する。

IDO 法を AMR 法での流体計算にもちいることで、細分化した際の格子点上の物理量をエルミート補間により高精度に補間することが可能になる。そのため、隣の格子点が存在しない格子点での計算の精度も上がることとなる。

また、IDO 法の中心補間は非等間隔での計算でも高精度に補間ができるので、AMR 法で問題になる非等間隔格子での計算も高精度を維持することが可能になる。

4. 検証

検証問題として、

- ・複雑境界への適応への検証として Doswell によって提唱された前線発達問題 (Frontogenesis)
- ・保存性の検証として、前述の Doswell の前線問題で使われた速度場で2次元保存方程式をとき、その解の面積保存性の検証
- ・保存性の検証として、集中速度場での2次元保存方程式をとき、その解の質量保存誤差の検証
- ・流体問題への適応の検証として Rayleigh-Taylor 不安定性問題

を解いた。

4.1 Doswell の前線発達問題

理想化された前線発達 (Frontogenesis) の運動は一般的な Navier-Stokes 方程式やエネルギー保存式を扱う流体問題を扱うことなく解くことができる。しかし、静的な速度場であるにも関わらず得られる流体構造が複雑であることや、その解析解が知られていることから、検証例題としてよく用いられている。今回は AMR 法が、その複雑な流体構造を捉えられるかを見るのが目的である。

初期プロファイルを図. 2、 $t = 20$ での計算結果を図. 3 に記す。2つの図は細分化のレベルを最大5までとして計算しており、最も細かい格子は 321×321 相当の細かさを持っている。流体構造が複雑になっても AMR 法により、格子がその流体構造を捉えきれているのがよく分かる。

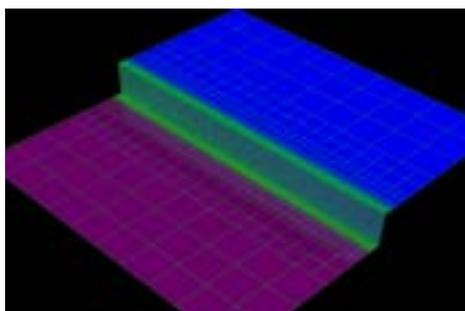


Fig. 2: Frontogenesis : $t = 0.0$ (Initial Profile)

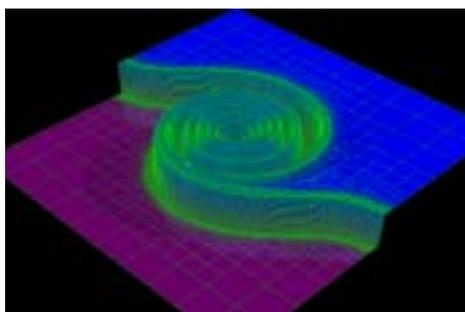


Fig. 3: Frontogenesis : $t = 20$

4.2 面積保存性

Doswell の前線問題は物理量の高さが変化しないことから、解析的にはその面積が全ての計算時間で保存する。そこで、同じ速度場を用いて、面積の保存性について調べた。具体的には、前線の最もはやい箇所が全体を半周するまでを計算し、細分化のレベルに伴い面積の保存性がどのように変わるかを調べる。計算結果を図. 4 に記す。level 3 は 81×81 、level 4 は 161×161 、level 5 は 321×321 に相当する細かさである。細分化のレベルを上げるに従って面積の保存性が増していくのが確認された。

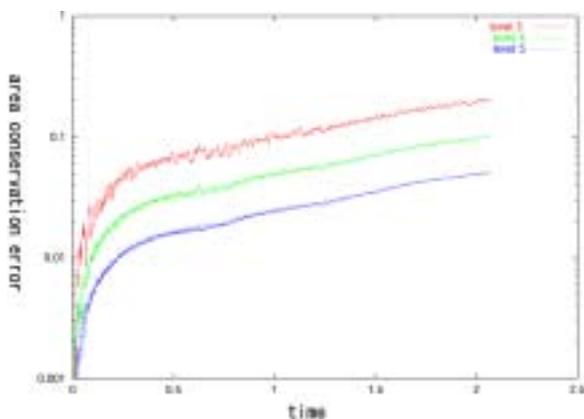


Fig. 4: area conservation error

4.3 体積保存性

集中速度場を用い、中心に向かって寄せていったとき、細分化のレベルによってその体積の保存性がどのように変わるかを調べた。初期プロファイルは Fig. 5、 $t = 4$ でのプロファイルは Fig. 6 となった。体積保存性の結果を図. 7 に記す。level 3 は 81×81 、level 4 は 161×161 、level 5 は 321×321 に相当する細かさである。細分化のレベルを上げるに従って体積の保存性が増していくのが確認された。

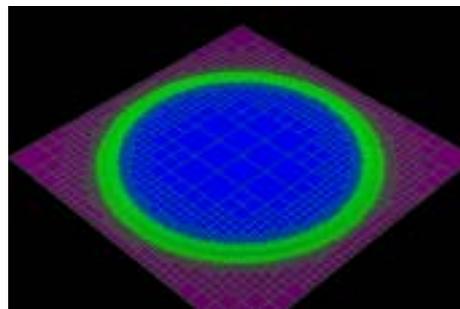


Fig. 5: converging velocity field : $t = 0.0$ (Initial Profile)

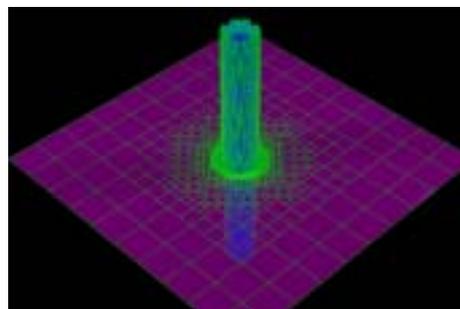


Fig. 6: converging velocity field : $t = 4.0$

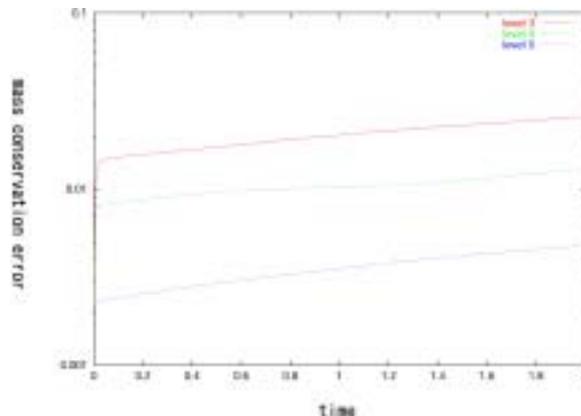


Fig. 7: mass conservation error

4.4 Rayleigh-Taylor 不安定性問題

最後に、流体計算に AMR 法が適応できるかを検証するために Rayleigh-Taylor 不安定性問題を解いた。計算領域は x 方向が 0.0~0.3、y 方向が 0.0~1.2 とした。細分化の最大のレベルを 4、すなわち最も細かいところで 81×321 相当での計算をおこなった。以下に計算結果を記す。t = 0.0, t = 0.25, t = 0.5, t = 0.75, t = 1.00 での密度プロファイルをそれぞれ Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12 に記す。また、細分化の最大のレベルを 2 としたものの計算結果を Fig. 13、3 としたものを Fig. 14 に記す。レベル 4 のものと 2、3 を比較すると 4 の方がより細かい構造を捉えていることが確認できた。

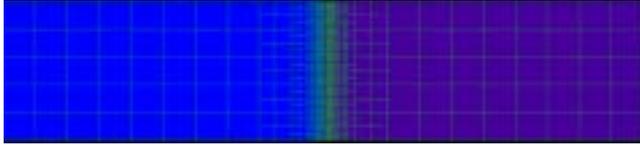


Fig. 8: Rayleigh-Taylor instability : level 4 : t = 0.0 (Initial profile)

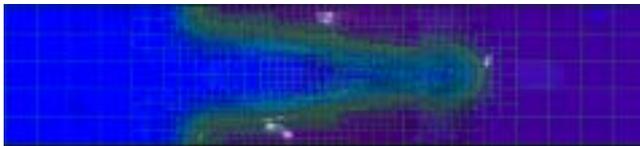


Fig. 9: Rayleigh-Taylor instability : level 4 : t = 0.25

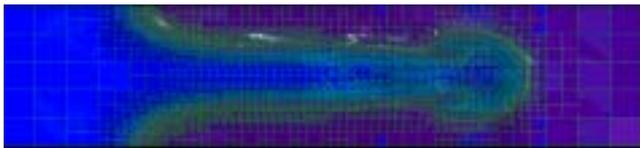


Fig. 10: Rayleigh-Taylor instability : level 4 : t = 0.50

5. 結論と今後の課題

AMR 法に IDO 法を適用し、2 次元での体積・面積の保存性を検証した。また、流体問題への適用が可能であることを示した。得られた結果は非常に AMR 法を用いずに、全ての領域を細かくしたものとほぼ変わらない精度が出せることが確認できた。

今後の課題としては、計算機の並列化と非圧縮流体への応用があげられる。

参考文献

1. Marsha J. Berger Joseph Oliver ; Journal of Comput. Phys. 53, (1984) pp 484-512
2. Takayuki Aoki; Comput. Phys. Commun. 102 (1997) pp 132-146.
3. Charles A. Doswell ; Journal of Atmospheric Science 41 (1984) pp 1242-1248

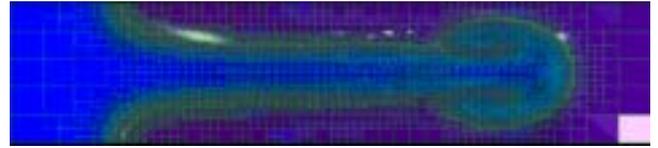


Fig. 11: Rayleigh-Taylor instability : level 4 : t = 0.75

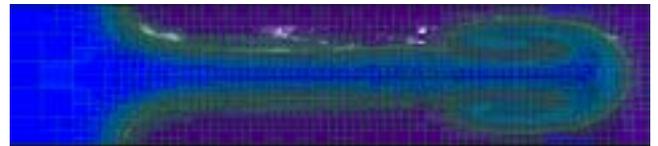


Fig. 12: Rayleigh-Taylor instability : level 4 : t = 1.00



Fig. 13: Rayleigh-Taylor instability : level 2 : t = 1.00



Fig. 14: Rayleigh-Taylor instability : level 3 : t = 1.00