

## 複断面蛇行開水路流れの三次元乱流数値解析

### Numerical analysis of developing turbulent flow in compound meandering open-channel

杉山 均, 宇都宮大学工学研究科, 〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2, E-mail: sugiyama@cc.utsunomiya-u.ac.jp  
齊藤 卓也, 宇都宮大学工学研究科, 〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2, E-mail: saito@ace.ees.utsunomiya-u.ac.jp  
Hitoshi SUGIYAMA, Grad. School of Eng., Utsunomiya Univ., 7-1-2 Yoto, Utsunomiya, 321-8585, JAPAN  
Takuya SAITO, Grad. School of Eng., Utsunomiya Univ., 7-1-2 Yoto, Utsunomiya, 321-8585, JAPAN

Numerical analysis has been performed for the developing turbulent flow in compound meandering open-channel flow by using algebraic Reynolds stress model and boundary fitted coordinate system. The turbulent flow in compound meandering channel is one of the complicated turbulent flows, because the flow behavior is influenced upon many kinds of forces that are centrifugal force, pressure driven force and shear stress generated between main channel and flood plain. The flow of interest to study is one periodic compound meandering channel of five ones. The calculated results are compared with the experimental results including Reynolds stresses to clarify the validity of the present method. As a result of this calculation, it has been found that the present method is able to predict well the characteristic features.

#### 1. 緒 言

複断面開水路流れは、役割の異なる二種類の河道により構成される。すなわち、低水路と呼ばれる本来の河道と、高水敷と呼ばれる洪水時に氾濫原となる河道との二種類の河道から構成される。こうした複断面開水路は、多くの河川に認められる最も代表的な河川流路形状を呈しており、さらに低水路河道形状は、直線と曲がりにより構成される蛇行形状流路を形成することが一般的である。一方、こうした蛇行開水路における流動挙動は、遠心力と圧力勾配による力が相互作用し、主流方向流れ、断面内の二次流れは複雑に変化することは容易に類推できる。さらに、多くの場合河川流路流れは、非等方性の強い乱流場であることを考慮すると、乱流拡散によるせん断応力が作用し先の遠心力、圧力勾配による力との相互干渉により蛇行開水路内の流れはさらに複雑化する。また、この種の蛇行開水路流れが氾濫し複断面蛇行開水路流れとなると高水敷を流れる流れと、低水路を流れる流れとが、その境界部にて相互干渉し激しい運動量交換を伴う結果、強いせん断層領域を形成することになる。以上のように複断面蛇行開水路流れは、複雑乱流に代表される流れの一つであり、その流動挙動を実験的、解析的に明らかにすることは自然災害を踏まえた複断面河道設計を確立する上で有意義なことである。

複断面開水路流れに関する研究は、低水路形状により大きく分類される。特に直線開水路形状は比較的多くの研究結果が提示され、非等方性乱流に特徴的な斜昇流の存在を報告している<sup>(1),(2),(3)</sup>。複断面曲がり開水路流れにおいては、先の斜昇流と圧力勾配力による二次流れとの干渉が興味あるところであるが、こうした流れについても、今本-石垣-藤沢<sup>(4)</sup>による計測結果が報告されている。彼らは、180°の単一曲がりを有する開水路流れの水理特性を熱膜流速計により測定している。さらに、彼らの実験を対象にした数値解析結果<sup>(5)</sup>も報告されている。

複断面蛇行開水路流れに関しては、その乱流計測結果がShiono-Muto<sup>(6)</sup>、武藤-塩野-今本-石垣<sup>(7)</sup>により報告されている。彼らは、三種類の水深を設定し矩形断面を有する蛇行開水路流れ、すなわち低水路内流れ、および、水深の異なる二種類の複断面蛇行開水路流れを対象に、レーザ・ドップラー流速計を用いレイノルズ応力分布も含め主流方向速度、二次流れ分布を計測している。特徴的な点として、蛇行開水路流れの二次流れ分布が、複断面開水路流れの二次流れとは大きく

異なることを指摘し、高水敷を流れる流れが大きく影響を及ぼすことを実験的に示した。また、乱流モデルの普遍性向上を図る上から、こうした複雑乱流場の基礎的実験データが不可欠であることも指摘している。武藤ら<sup>(8)</sup>は、矩形断面ばかりでなく台形断面を有する複断面蛇行開水路流れについても計測を行い、その計測結果についても同時に報告している。Kiely<sup>(9)</sup>も複断面蛇行開水路流れを対象に、レーザ・ドップラー流速計を用いて計測を行い、平均速度、水位変化を示し、二次流れ強度は主流方向速度の30%程度の値を有することを報告しているが、乱流特性量の測定結果については示されていない。Sellin-Ervine-Willetts<sup>(10)</sup>は、大型実験水路を用いて系統的な実験を行っている。彼らは低水路断面形状が流れ方向に変化する複断面蛇行開水路流れを対象に、河床粗度、曲がり角、流量を変化させた場合の平均流速分布、水位変化などを報告している。最近の研究では、Ervine-Babaeyan・Koopaei-Sellin<sup>(11)</sup>は、複断面蛇行開水路流れにおける水深平均速度を計測し、その測定結果を、運動方程式の積分化より得られる水深平均速度に関する方程式の解析結果と比較している。その際、低水路断面形状は、台形断面を基本とした数種類の形状で比較し、比較的良好に実験値を予測できることを報告している。また、Patra-Kar<sup>(12)</sup>は、9種類の複断面蛇行開水路流れに対し流量予測、せん断応力予測を報告している。

以上のように複断面蛇行開水路内の乱流構造に関しては、実験的に徐々に解明されつつあるが、数値解析によりレイノルズ応力成分も含め、その三次元流動挙動を予測した結果は未だ報告されていない。これは、流れが乱流であること、流路形状も比較的複雑であることに起因するためと思われる。しかし、この種の複雑乱流を予測する数値解析手法を確立しておくことは、その流動挙動を解明する上でも、また実験では得られない知見を得るためにも有意義なことである。

こうした研究経緯を考慮し本研究においては、未だ数値解析結果が報告されていない複断面蛇行開水路流れを対象に三次元数値解析を試み、本解析手法の妥当性を検討するとともに、この種の流れの流動挙動について新たな知見を得ることを目的とする。解析対象実験としては、レイノルズ応力分布まで詳細に測定した武藤-塩野-今本-石垣<sup>(7)</sup>の実験を対象とする。解析に際しては、乱れの非等方性を再現するためレイノルズ応力輸送方程式を解くこととし、その対流、拡散項に対しては代数式化した代数応力モデルを用いた。さらに複断面蛇行形状に境界条件を正確に設定するため境界適合座標系を導入し解析を行った。

## 2. おもな記号

- $P$  : 圧力  
 $R$  : 径深  
 $Re$  : レイノルズ数 =  $4RU_b / \nu$   
 $r$  : 曲がり半径  
 $r_c$  : 曲がり流路中心位置までの半径  
 $t$  : 時間  
 $\overline{u_i u_j}$  : レイノルズ応力  
 $U_i$  : 直交座標系での  $i$  方向平均速度  
 $U_b$  : 断面内主流方向平均速度  
 $U_r$  : 円筒座標上の半径方向平均速度  
 $U_\theta$  : 円筒座標上の円周方向平均速度  
 $\overline{U_*}$  : 平均摩擦速度  
 $u_r$  : 円筒座標上の半径方向変動速度  
 $u_\theta$  : 円筒座標上の円周方向変動速度  
 $u_z$  : 円筒座標上の深さ方向変動速度  
 $X_i$  : 直交座標上での  $i$  方向座標軸  
 $Z$  : 円筒座標上の深さ方向座標  
 $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ記号  
 $\theta$  : 曲がり角度  
 $\nu$  : 分子粘性係数  
 $\rho$  : 密度

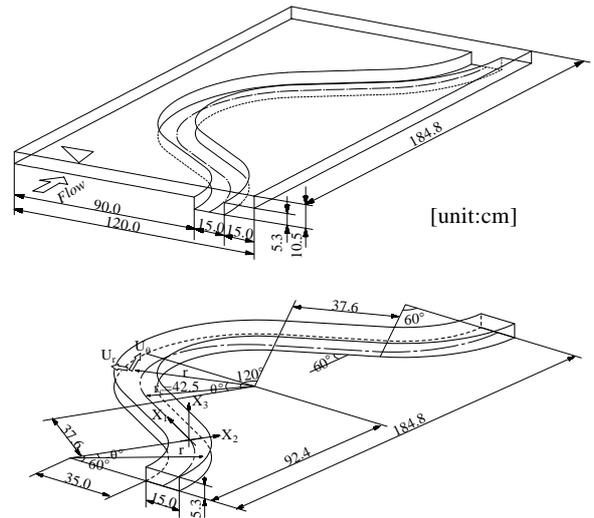


Fig. 1 Compound meandering open channel and definition of coordinate system

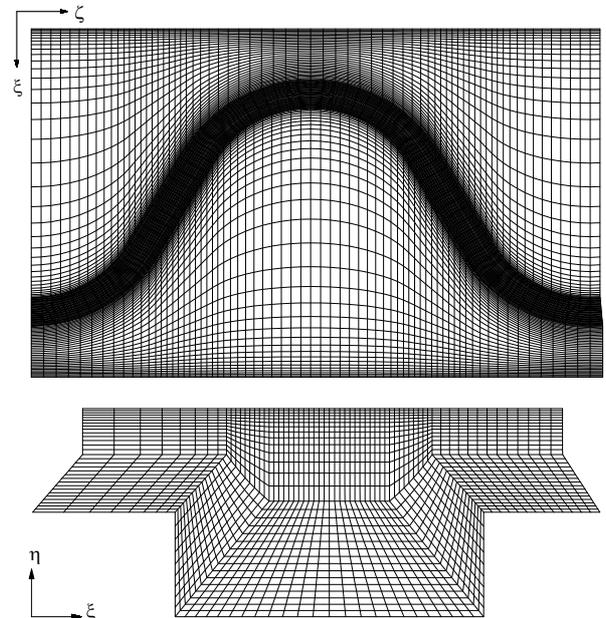


Fig. 2 Computational mesh

### 3.1 計算対象実験

本解析においては、武藤ら<sup>(7)</sup>の複断面蛇行開水路流れを計算対象とした。彼らは、水深の異なる二種類の計測結果を提示しているが、本研究では相対水深（高水敷水深 / 低水路水深）が 0.5 の結果を対象とした。蛇行開水路は、5 周期の蛇行水路より構成されているが、その 1 周期蛇行開水路、計算座標系を Fig. 1 に示す。1 周期長さは 184.8cm で、その全長は 924cm である。さらにその半周期蛇行部は曲がり角  $60^\circ$ 、曲がり半径 42.5cm の曲がり部と 37.6cm の直線部より構成されている。一方、全体開水路の全幅は 120cm、低水路断面の流路幅は 15.0cm、低水路深さは 5.3cm である。測定領域は入口から 4 番目の上流側半周期の蛇行部であり、この位置は開水路出口から 2m 以上離れ、下流の影響はないことが報告されている。測定は二成分レーザ流速計を用い水路の 7 断面にて行っている。レイノルズ数は代表速度に断面内平均速度、代表寸法に径深の 4 倍を用いた値で  $4.92 \times 10^4$  である。

座標系に関しては図に示すように直線開水路では直交座標系を、蛇行開水路では円筒座標系を用いて各特性量を示した。直交座標系では主流方向を  $X_1$ 、断面方向を  $X_2$ 、 $X_3$  とし直線開水路の入口断面の河床中央点を便宜的に原点とした。また、直線開水路を挟んで上流部、下流部に位置する曲がり部の各断面を示す際には、それぞれ曲がり角度の正符号、負符号をもって定義した。従って半周期蛇行開水路の入口断面は  $-60^\circ$  出口断面は  $60^\circ$  に相当する。

### 3.2 支配方程式

運動方程式は以下のように示される。

$$\frac{D\overline{U}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \nu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} - \overline{u_i u_j} \right] \quad (1)$$

ここで  $D/Dt = \partial/\partial t + \overline{U}_j \partial/\partial X_j$  である。運動方程式中のレ

イノルズ応力を求める際には、以下に示すレイノルズ応力輸送方程式を解くものとした。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left( \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \\ & + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (2)$$

しかし、上式を直接的に解くことは不可能でありいくつかのモデル化が必要となる。左辺第1項の対流項、ならびに右辺第2項に対しては Rodi<sup>(13)</sup> 近似を用いてモデル化を行った。この近似より対流、拡散項は微分型から代数式に変換される。さらに、レイノルズ応力輸送方程式をモデル化する際に問題

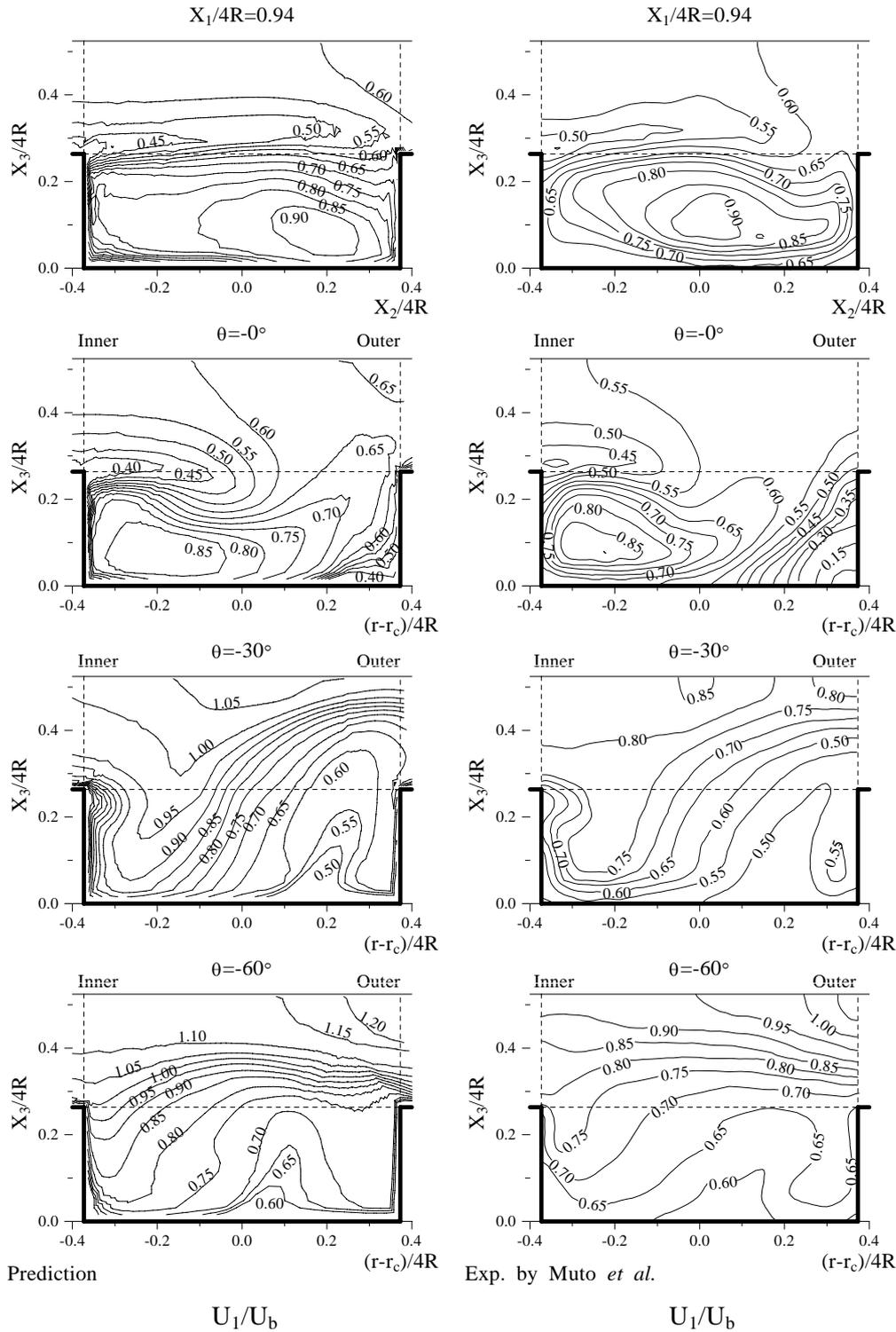


Fig. 3(a) Comparison of mean velocity in the first curved and straight open channels

となる圧力・歪相関項のモデル化に際しては、四次相関テンソルに付与される制約条件を一部改良しモデル構築を行った。モデル導出、定数決定については別報<sup>(14)</sup>にて詳述した。乱流エネルギー、乱流散逸輸送方程式については、高レイノルズ数型方程式を用いた。輸送方程式系、定数系については別報<sup>(15)</sup>にて言及した。

### 3.3 境界適合座標系

境界適合座標系による手法は、物理平面の解析領域を計算領域へと座標変換し計算平面上にて支配方程式を解く手法である。境界条件の設定が容易な反面、支配方程式は複雑となる。支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (3)$$

上式中の  $\xi, \eta, \zeta$  は変換された計算平面上での座標軸を

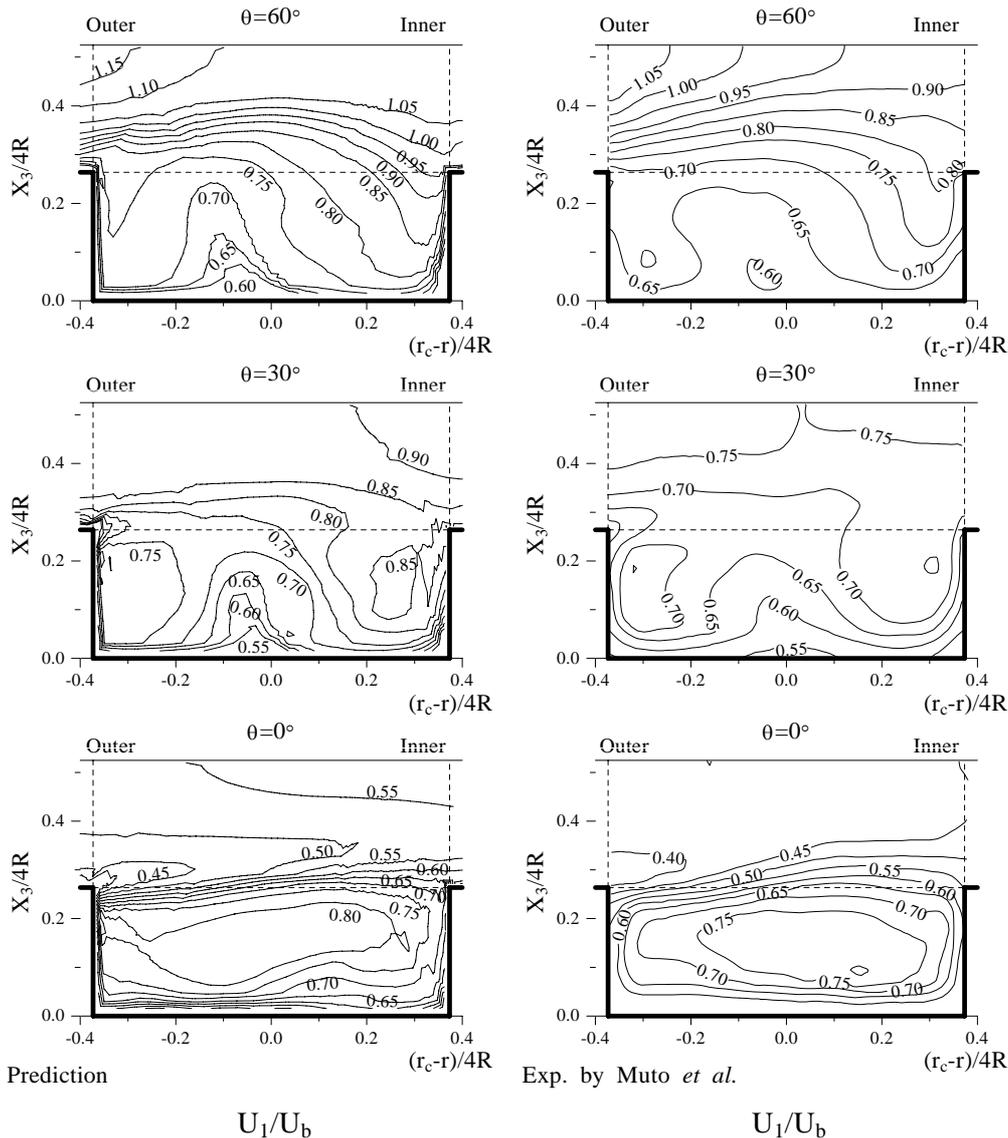


Fig. 3(b) Comparison of mean velocity in the second curved-open channel

示す．同時に物理平面上では計算格子形状に沿った座標軸を示している．上式を用いた各方程式の変換手法，変換により導出された輸送方程式，反変速度，計量テンソルなどは別報<sup>(14)</sup>にて詳述した．

### 3.4 自由水面における境界条件

開水路乱流を特徴づける自由水面の影響を，境界条件にいかんにか反映させるかも開水路乱流を正確に予測する上で重要な要因となる．本解析では以下のように自由水面での境界条件を設定した．自由水面での乱流散逸は，一般に壁関数として使用される式を用いて計算を行うこととした．主流方向速度，水平方向速度および乱流エネルギーは自由水面で勾配零を，垂直方向速度は零の境界条件を課した．

また，自由水面近傍では，自由水面に対し垂直方向の乱れ強度が自由水面に到達する以前に減衰し，自由水面下にて非常に小さな値を取ることが実験的に指摘されている<sup>(16)</sup>．この減衰現象を境界条件に加味する意味より，垂直方向乱れを自由水面から計算第一点まで零とし，この減衰現象を近似することとした．一般に，壁面近傍でも壁面に垂直方向の乱れ強度は，壁面に近づくにつれ減衰し，自由水面の場合と類似の

傾向を示す．この意味から自由水面も一種の仮想壁面と考えられる．こうした自由水面の境界条件の導出背景<sup>(17)</sup>，いくつかの開水路流れへ適用しての妥当性については別報<sup>(18)</sup>にて報告した．

### 3.5 数値解析

数値解析に際しては流れの周期性を考慮し，1周期長さの蛇行開水路流れを対象に，流路流入部，流出部に周期境界条件を課した．圧力以外の諸物理量に関しては入口，出口部にて同一値を取るよう設定し，圧力に関しては入口，出口における圧力勾配値が等しくなるように設定した．

全体流路の計算格子配列，ならびに低水路断面の計算格子を Fig. 2 に示す．，，は計算格子に沿った座標軸を示し，計算格子は断面内で  $x = 111 \times 31$ ，流れ方向に 70 設けた．曲がり部では  $5^\circ$  ごとに格子を配列した．開水路流れでは圧力変化より水位が変化することになるが，計算では，一定水位として計算を行った．本解析における乱流モデルは，高レイノルズ型乱流モデルであり，従って乱流エネルギー，乱流散逸輸送方程式の境界条件には壁関数を用いた．支配方程式の離散化は有限差分近似により行い，計算諸量の格子点

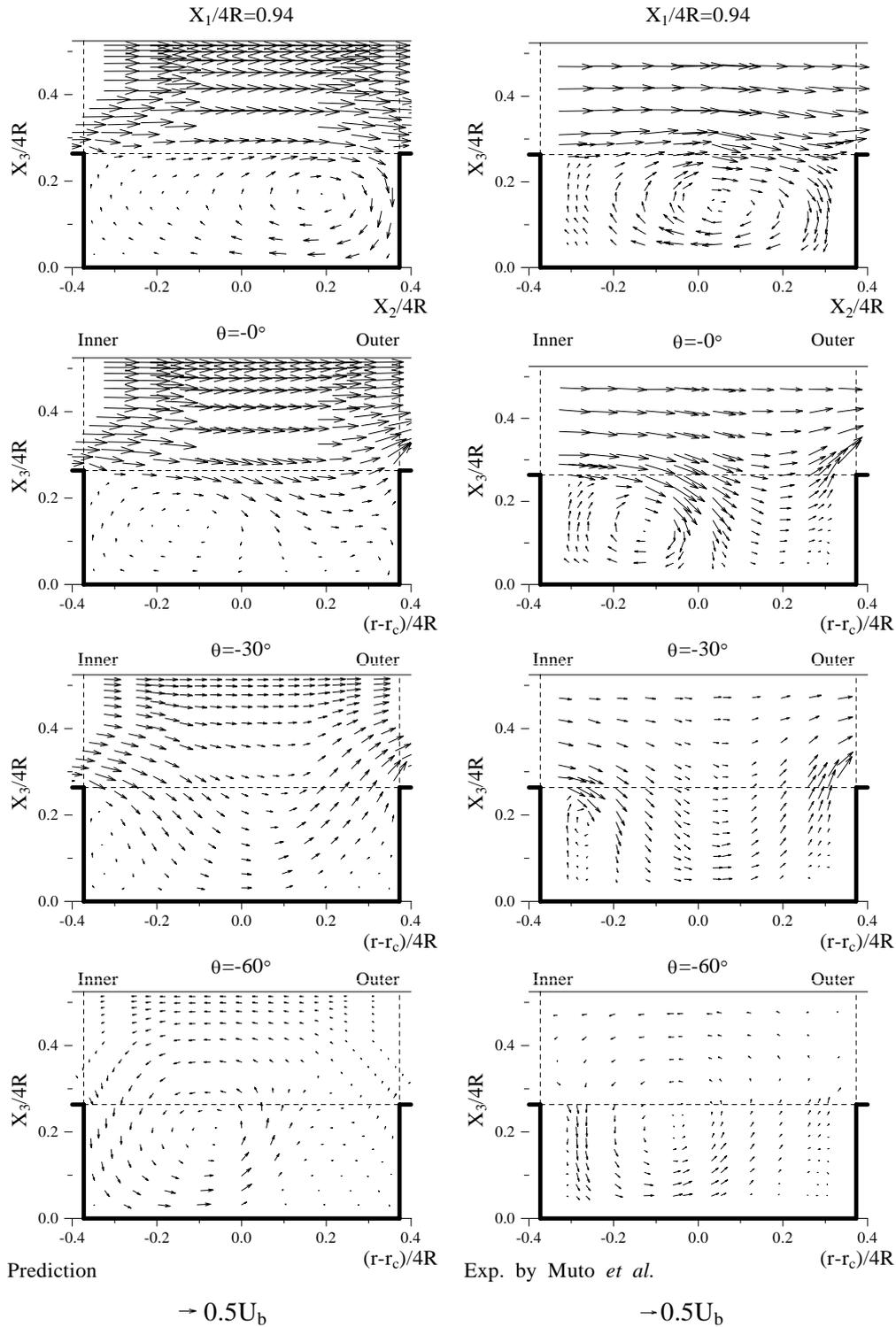


Fig. 4(a) Comparison of secondary flow in the first curved and straight open channels

配置は Regular Grid 法によった。各支配方程式の対流項差分近似は QUICK (三次精度の風上差分) を使用した。また、非定常項は陽解法とし、次の計算ステップにおける物理量が既知の時間ステップにて表されるよう差分した。陽解法の場合、計算時間刻みは大きく取ることができず Courant 数が常に 1 以下となるよう時間刻みを設定した。代数応力モデルの場合、レイノルズ応力輸送方程式の対流、拡散項を代数式にモデル化する場合、非定常項は省略される。圧力解法に関して

は圧力補正量のポアソン方程式を反復法にて解き、元の圧力値に加え圧力場、速度場を構成する。これを連続の式が満足されるまで繰り返すことより圧力場を得た。

## 4. 結果と考察

### 4.1 速度場の比較

Fig. 3(a),(b)に主流方向速度等値線を比較した結果を示

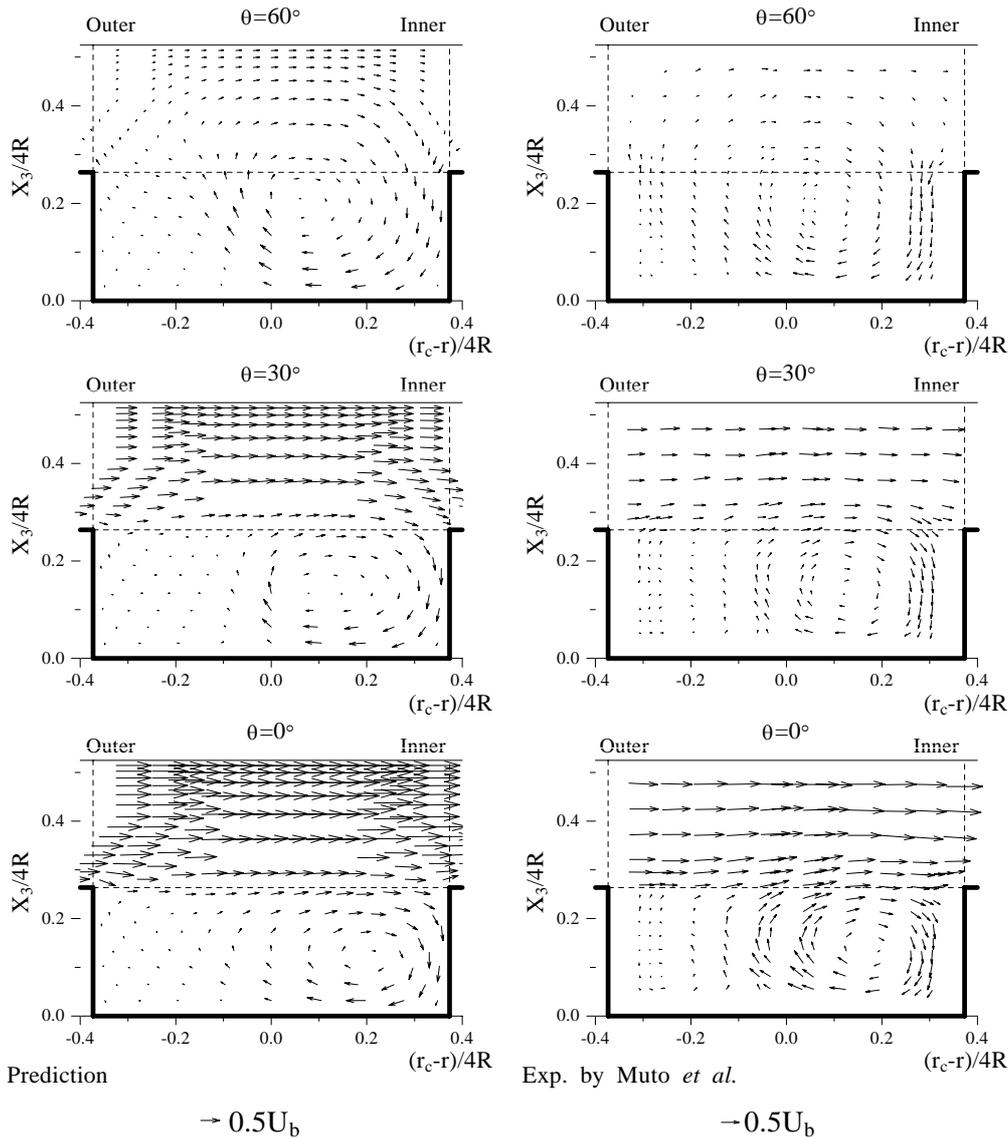


Fig. 4(b) Comparison of secondary flow in the second curved-open channel

す。Fig. 3(a)には  $\theta = -60^\circ$  断面（流入断面）から直線水路に位置する  $X_1/4R = 0.94$  断面までの、Fig. 3(b)には  $\theta = 0^\circ$  断面（第2の曲がり複断面開水路入口）から  $\theta = 60^\circ$  断面までの比較結果を示している。両図とも低水路領域における主流方向速度を比較している。各等値線は、主流方向平均速度にて無次元化している。また、図において  $\theta$  が負の場合、低水路断面の左側は内壁 (Inner) を右側は外壁 (Outer) を示し、正の場合、左側は外壁を右側は内壁を示す。流入断面に相当する  $\theta = -60^\circ$  断面における実験結果から、低水路内では比較的速度の遅い低速流体が存在するのに対し、Outer側の自由水面近傍には高速流体が形成される。低水路蛇行開水路部が複断面開水路流れにおいて抵抗として作用することを考えると、高水敷を流れる上層流はより抵抗の少ない、すなわち低水路蛇行開水路が存在しない複断面開水路の左右側壁近傍を流れることになり、この領域で高速領域を形成することになる。一方、低水路領域における低速流体は下流に発達するにつれその流速を増し、 $X_1/4R = 0.94$  断面では0.9と比較的大きな値を有することになる。その際、増速は低水路のInner側から始まり、 $\theta = -0^\circ$  断面から解かるように低水路コーナ部で比較的大きな値を有し、その後、直線低水路ではこの高速領域は

水路中央部へと移動していく。また、高水敷を流れる上層流と低水路を流れる下層流とが干渉する領域にて等値線間隔が比較的密に存在する。以上のようないくつかの特徴的現象を実験結果と大差なく数値解析も再現している。

Fig. 3(b)から、第2の曲がり複断面開水路に流入すると低水路領域に形成された最大流速値は、曲がりが進むにつれ減少することが両結果から理解できる。蛇行開水路の半周期位置に相当する  $\theta = 60^\circ$  断面の実験結果に着目すると、低水路河床近傍で低速流体が自由水面に向かって形成されることが、その等値線分布から理解できる。一方、数値解析結果も定量的に多少差はあるものの、同様な現象を予測し解析手法の妥当性を示している。こうした現象は、二次流れと強い相関を持つ。次にこの二次流れ分布の比較を行う。

Fig. 4(a),(b)に二次流れの比較結果を示す。両結果とも上流側から二次流れを鳥瞰した結果を示している。一般に曲がり開水路流れでは遠心力、圧力勾配による力、さらに乱流拡散による力が作用し、これらの力のバランスにより二次流れは支配される。しかし、本解析のような流れの場合には、さらに高水敷を流れる上層流が低水路に形成される二次流れに影響を及ぼすことになる。両結果より二次流れは、 $\theta = -60^\circ$

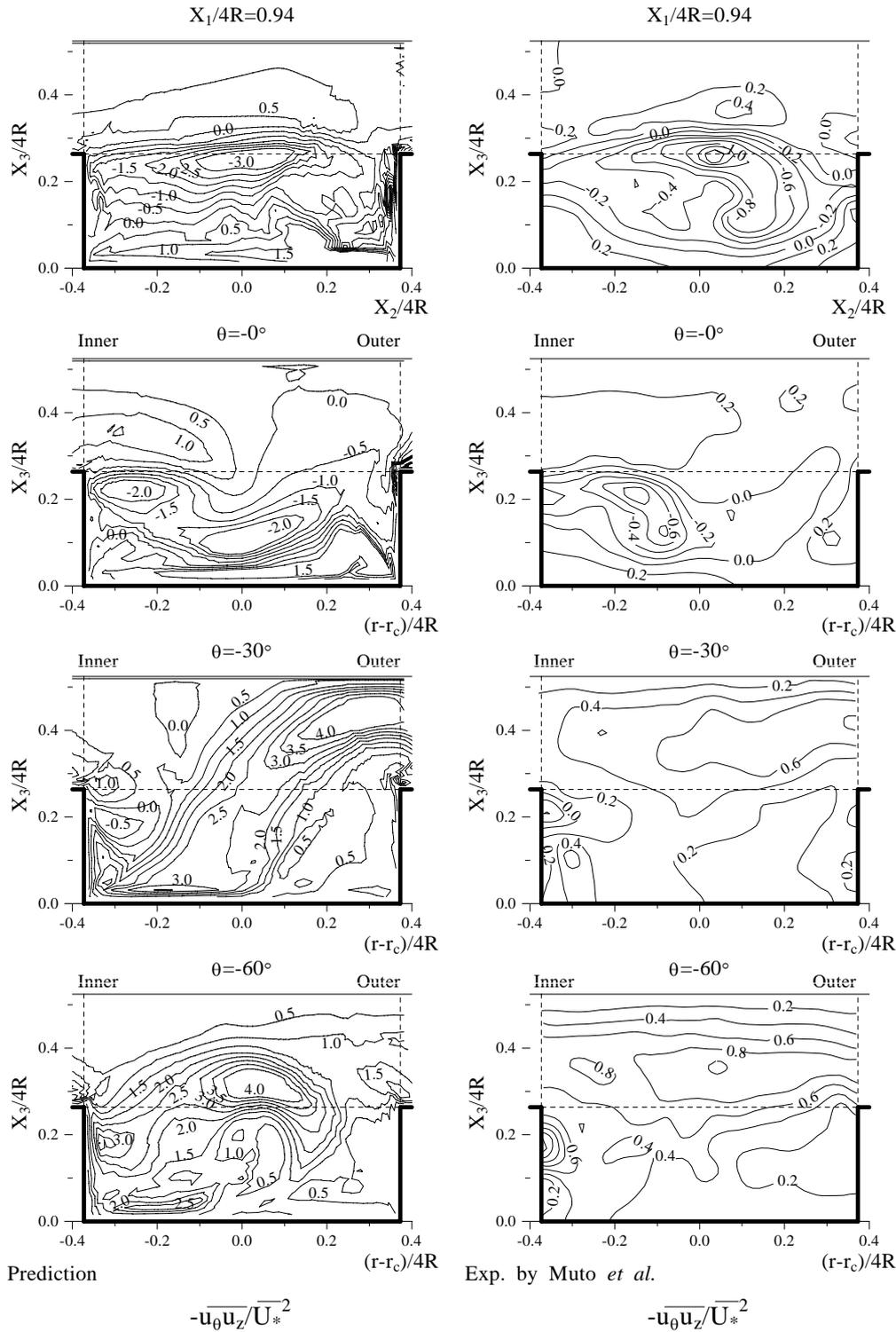


Fig. 5(a) Comparison of shear stress between streamwise and vertical directions in the first curved and straight open channels

断面から $-30^\circ$ 断面に移行すると大きく変化することが解かる。

これは低水路が曲がることにより、高水敷を流れる上層流と交差角を生じ、その結果、低水路側壁に対し法線方向への上層流の分速が、低水路断面内に生成されるためである。この流れは  $-30^\circ$ 断面の二次流れ分布から明らかである。さらに流れの発達に伴って低水路Inner側に時計回りの渦を形成する。この渦は下流に発達するに従い低水路Outer側へ

と移動する。

また、Inner側から低水路に流入する二次流れは、上層流からの高速流体を低水路内に、Outer側から高水敷水路に向かう二次流れは低速流体を高水敷水路に移流する。このことは、Fig. 3(a)に示した主流方向速度等値線分布からも理解できる。この移流現象の結果として低水路内に最大流速領域を形成することになる。こうした現象からも、この種の複断面蛇行開水路流れでは、高水敷の上層流が低水路流れに大きく影響

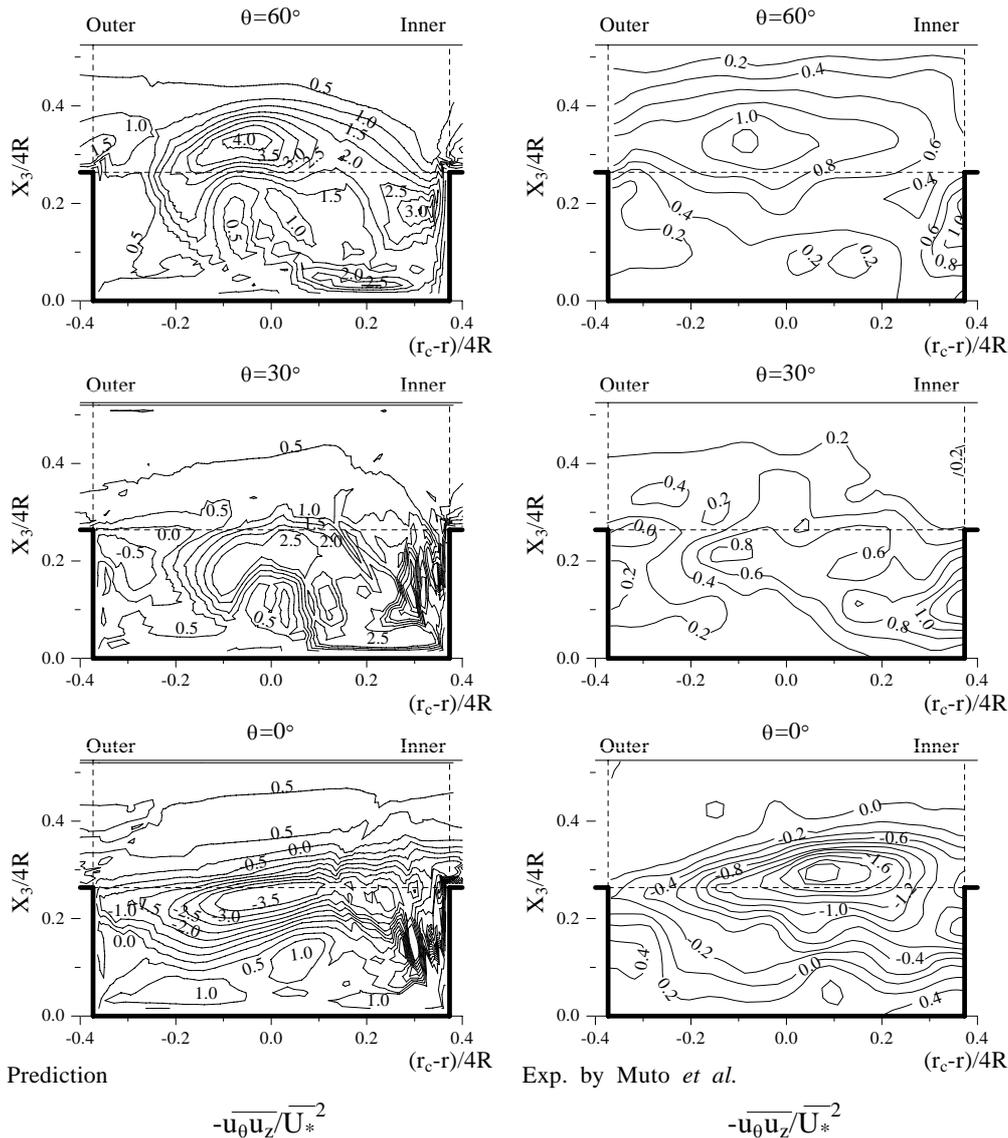


Fig. 5(b) Comparison of shear stress between streamwise and vertical directions in the second curved-open channel

を及ぼすことを推察できる。同時に、低水路流れ構造は低水路側壁の法線と高水敷側壁からの法線との交差角に大きく依存することも類推できる。数値解析は、 $\theta = 0^\circ$  断面に生成される渦強度を小さく予測するものの、以上の特徴的現象を比較的良好に予測している。

Fig. 4(b)は、第2の曲がり複断面開水路における二次流れ分布の比較結果である。両結果とも、半周期位置に相当する  $\theta = 60^\circ$  断面の二次流れは、流路入口の  $\theta = -60^\circ$  断面の二次流れを下流から鳥瞰した分布に一致しており周期的な流れが形成されていることを示唆している。また、その二次流れ強度は、第2曲がり開水路に流入すると減少する。数値解析結果も同様な傾向を示し、その流れを再現している。

#### 4.2 応力場の比較

Fig. 5(a),(b)にせん断応力  $-\overline{u_0 u_z}$  の比較結果を示す。両結果とも平均摩擦速度にて無次元化している。計算結果と実験結果とを比較すると、大きく異なる点として  $\theta = -60^\circ, 60^\circ$  断面において計算結果は、低水路領域に大きな値を示す点を指摘できる。せん断応力  $-\overline{u_0 u_z}$  の生成が、主流方向速度の深さ方向速度勾配  $\partial U_\theta / \partial Z$  に影響されることを考えると、こうした

差異は、計算では主流方向速度を大きく、また、その等値線分布を実験より密に予測していることがその差異要因の一つとして指摘できる。さらに下流の  $\theta = -30^\circ$  断面にて両結果を比較すると、計算では上層の高水敷流路、および低水路河床壁上で高い値を示しているが、主流方向速度等値線の計算結果を考慮すると、こうした計算結果も主流方向速度の深さ方向速度勾配が大きく影響したためと解釈される。この意味から、計算結果は、主流方向速度分布の特徴的分布を反映しているものと考えられる。こうした計算結果に認められる傾向は、第2の曲がり複断面開水路流れ場においても同様である。

以上のような差異も指摘できるが、例えば零ラインに着目すると流入断面では形成されず、蛇行開水路部に流入すると Inner側壁に現れ、その後、Inner, Outer側壁を結ぶように形成され出口部で消滅するが、計算もこうした現象を比較的良好的に予測している。こうした異符号領域の生成は、その零ラインの存在を正確に予測することが不可欠であり、この零ラインは、主流方向速度の二次流れによる歪みに起因することを考慮すると、本解析手法は主流方向速度分布、二次流れ分布を比較的良好的に予測しているものと思われる。

## 5. 結 論

複断面蛇行開水路流れを対象に、その三次元乱流挙動を解析し以下の結論を得た。

- (1)本解析手法は、低水路内の主流方向速度分布、および高水敷を流れる主流方向速度分布の特徴的な分布を定性的、定量的に再現した。
- (2)二次流れ強度は低水路側壁の法線と高水敷側壁からの法線との交差角の大きい直線水路で最大値を示しその交差角に依存する。解析結果は複雑に変化する二次流れを比較的良好的に予測する。
- (3)せん断応力分布は、零ラインの発生により異符号領域が形成される点に特徴があり、計算結果もこうした点を再現している。
- (4)本解析手法は複断面蛇行開水路の複雑乱流構造を予測することが可能であることを示した。

## 参考文献

- (1) Townsent, D.R., *Proc. Institution of Civil Engineers*, Vol.40 (1968),155-175.
- (2) Prinos, D. P., Townsent, D.R. and Tavoularis, S., *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, 111-9(1985),1246-1261.
- (3) Tominaga, A. and Nezu, I., *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, 117-1(1991), 21-41.
- (4) 今本博健,石垣泰輔,藤沢寛, 京都大学防災研究所年報,13B (1970), 311-321.
- (5) 杉山均,秋山光庸,田中美恵子, 応用力学論文集, 1(1998), 683-692.
- (6) Shiono, K. and Muto, Y., *J. Fluid Mech.*,376(1998), 221-226.
- (7) 武藤裕則,塩野耕二,今本博健,石垣泰輔, 京都大学防災研究所年報,38B-2(1995),561-580.
- (8) 武藤裕則,塩野耕二,今本博健,石垣泰輔, 京都大学防災研究所年報,39B-2(1996),543-558.
- (9) Kiely, G., *Int. Conf. River Flood Hydraulics*,(1990),207-217.
- (10) Sellin, H.J.,Ervine ,D.A. and Willetts,B.B., *Proc. Institution of Civil Engineers*, Vol.101 (1993),99-101.
- (11) Ervine, D.A.,Babaeyan-Koopaei, K. and Sellin, H.J., *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, 126-9(2000),653-669.
- (12) Patra, K.C. and Kar, S.K., *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, 126-8(2000), 593-604.
- (13) Rodi, W., *Z. Angew. Math Mech.*, 56(1976), T219-T221
- (14) 杉山均,秋山光庸,山中和典,平田賢,土木学会論文集, 479/-25(1993), 81-90.
- (15) 杉山均,秋山光庸,佐藤亮輔, 土木学会論文集, 628/-48(1999), 149-161.
- (16) Nakagawa, H., Nezu, I. and Ueda, H., *Proc. of Japan Soci. Civil Engrs.*,241(1975),155-168.
- (17) 杉山均,秋山光庸,松原珠, 土木学会論文集,515/-31(1995),55-65
- (18) 杉山均,秋山光庸,亀澤正之, 土木学会論文集, 572/-40(1997), 11-21.