5 次精度 QSI スキームを用いた自由液面流れの数値解析手法

Computational Method for Free-Surface Flows with 5th-Order QSI Scheme

牛島 省，禰津 家久，吉田 圭介，池田 大輔
京都大学大学院 環境地球工学専攻，〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
S. Ushijima, I. Nezu, K. Yoshida and D. Ikeda
Department of Global Environment Engineering, Kyoto University
Kyoto-shi, 606-8501, Japan, E-mail : ushijima@gee.kyoto-u.ac.jp

A computational method has been proposed for viscous incompressible flows accompanied by oscillating free surfaces. The free surface profiles are represented by general curvilinear coordinates generated at every computational time step on the basis of the ALE method. The transformed Navier-Stokes equations are discretized on the collocated grid arrangement. The velocity-pressure correction is performed with C-HSMAC method, which is effective for free-surface flows on the present coordinates and grid system. The computational method was applied to small amplitude standing waves under the effect of gravity and surface tension forces. In addition, it was also applied to lid-driven cavity flows with free-surfaces as well as the non-linear waves caused by a pressure pulse imposed on a free surface. As a result, it has been shown that the present computational method is effective to predict free-surface flows.

1. 緒言

自由液面の変動を伴う流れに対する数値解析手法について考察する．自由液面が水平座標の一価関数として表現される場合を対象として，一般座標系上における collocated 格子配置を採用し，ALE 法に基づき曲線座標系を再生成することで，変形する自由液面形状を扱う方法を用いる．また，移流項に 5 次精度相当の QSI スキームを利用するとともに，流体質量の保存性を高めるための流速と圧力を同時緩和法について検討を加える．

得られた解析手法を重力および表面張力が復元力となる矩形容器内の微小静振波，圧力パルスにより生ずる非線形液面振動および底面が移動壁となる容器内の自由液面流れに適用し，解析手法に関する基本的な検証を行う．また，内部流動が液面に影響を与える場合，液面形状を数値解析で精度良く求めるためには，移流項に対して高精度のスキームを用いる必要があり，QSI スキームはこの点で有用性が高いことなどを示す．

2. 計算手法

(1) 基礎方程式と離散化

鉛直 2 次元流れ場において x_2 軸が鉛直上方を向くように直交座標系 x_i $(i = 1, 2)$ をとる．外力として重力のみを考える．基本変数として直交座標系上の変数を用いる場合，一般座標系 ξ_m $(m = 1, 2)$ において離散化された Navier-Stokes 式は次のように表される．

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -g\ \delta_{2i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + F_i \tag{1}$$

ここに，u_i は x_i 方向の流速成分，g は重力加速度，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，ρ は流体密度，p は圧力である．(1) 式には Euler 陽解法が用いられており，Δt は 1 ステップの時間刻みである．F_i は移流項と拡散項から構成され，次式で与えられる．

$$F_i = -\left(U_m^n - U_{0m}^n\right)\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\nu \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tag{2}$$

ここに，ν は動粘性係数である．ALE 法 [1] に基づき，各時間ステップごとに液面形状に適合する格子を生成するため，内部の格子点位置も移動する．従って，(2) 式右辺第 1 項には流体流速の反変成分 U_m と物理空間中の格子点の移動速度の反変成分 U_{0m} が含まれる．

直交座標系の等間隔 collocated 格子上における QSI スキームの適用方法はすでに著者らにより示されている [2]．一般座標系では，写像空間中において，流速 u_i に対して ξ_m 方向に 5 次スプライン関数 S_{im} を求める．S_{im} は ξ_m に関する 5 次の多項式となるが，この 1 次の項の係数 C_{im1} を用いれば，(2) 式右辺第 1 項は次のように表される．

$$-\left(U_m^n - U_{0m}^n\right)\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} = -\left(U_m^n - U_{0m}^n\right)C_{im1} \tag{3}$$

また，連続式は，次のように表される．

$$\frac{\partial (J U_m^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \tag{4}$$

ここに，J はヤコビアンであり，次式で与えられる．

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \tag{5}$$

(2) 流速と圧力の同時緩和

Rhie & Chow[3] により提案された collocated 格子では，セル中心に流速と圧力を配置する．そして，圧力と流速の振動解を防ぐために，さらにセル境界面で定義される流速を圧力計算に利用する．

この変数配置に従い，物理空間中においてセル中心に位置し，次式を満足する流速 $u_{c,i}$ を導入する．

$$u_{c,i}^n = u_i^n + (-g\ \delta_{2i} + F_i)\,\Delta t \tag{6}$$

一方，セル境界上に $u_{b,i}$ なる流速を定義する．この値は $u_{c,i}$ を空間内挿することにより求める．

次に，セル境界上で流速の反変成分 $U_{b,m}$ を求める．$U_{b,m}$ により表示された連続式と，collocated 格子で用いられる $U_{b,m}$ と圧力の関係式はそれぞれ次のように表される．

$$\frac{\partial (J U_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial U_{b,m}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \tag{8}$$

ここで，g^{mk} は基本テンソルの反変成分である．

$$g^{mk} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \tag{9}$$

$n+1$ ステップにおいて，(7) 式と (8) 式を同時に満足する流速と圧力を求めるため，HSMAC 法 [4] を利用する解法を考える．ここでは，一般座標系における collocated 格子上での解法となるため，この手法を C-HSMAC 法と表記することとする．$n+1$ ステップにおける流速成分 $U_{b,m}^{n+1}$ と圧力 p^{n+1} が次のように (8) 式の時間方向の離散化式を満足するものとする．

$$U_{b,m}^{n+1} = U_{b,m}^{n} - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \tag{10}$$

一方，n ステップにおける圧力を用いた次式を考える．

$$U_{b,m}^{*} = U_{b,m}^{n} - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n}}{\partial \xi_j} \tag{11}$$

(10) 式から (11) 式の各辺を引くと次式が導かれる．

$$U'_{b,m} = -\frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \tag{12}$$

ここに，

$$U'_{b,m} = U_{b,m}^{n+1} - U_{b,m}^{*} \tag{13}$$

$$\phi = p^{n+1} - p^{n} \tag{14}$$

である．(13) 式を (7) 式に代入し，(12) 式を用いると，ϕ に対する次のポアソン方程式が導かれる．

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(J g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}\right) = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(J U_{b,m}^{*}\right) \equiv \frac{\rho}{\Delta t} D^{*} \tag{15}$$

C-HSMAC 法は，(12) 式，(13) 式，(14) 式および (15) 式を繰り返し解くことにより，連続式の誤差 D^* を十分小さくする方法である．

計算領域内の全てのセルにおいて，$k+1$ 回目の更新値 D^{*k+1} が，与えられたしきい値 D_0^* より小さくなった時点で解が収束したと見なす．このとき，D^{*k+1} は $JU_{b,m}^{n+1}$ の連続性に対する誤差に相当する．collocated 格子を用いた既往の流体計算でしばしば用いられてきた fractional step 法や SMAC 法 [5] では，定常解に到る過程において，圧力補正を行った後の $n+1$ ステップの流速成分の連続性は保証されていない．これに対して，C-HSMAC 法では $JU_{b,m}^{n+1}$ の連続性に対する誤差は D_0^* 以下に制御されていることになり，非定常問題や移動境界問題などを扱う際に有利である．

(3) 自由液面の計算法と境界条件

水深 h は，自由液面における動的境界条件から導かれる次の離散化式より求める．

$$h^{n+1} = h^{n} + \frac{J U_{s2}^{n+1} \Delta \xi_1}{\Delta x_1} \Delta t \tag{16}$$

ここで，U_{s2}^{n+1} は C-HSMAC 法により求められたセル境界上の流速の反変成分 $U_{b,2}$ とする．自由液面に接するセルに対して，$JU_{b,m}$ の連続性の誤差は D_0^* 以下に制御されているため，(16) 式から計算された h^{n+1} により，計算領域全体の流体質量は与えられた誤差の範囲内で保存される．

3. 適用例

上記のように内部流動の解析精度を向上させた自由液面流れの数値計算法の基本的な特性を確認するため，これをベンチマーク計算および数値実験に適用する．

(1) 矩形容器内の微小静振波

計算手法を矩形容器内に生ずる振幅が微小な静振波 (セイシュ) へ適用する．流体は非粘性であるとし，復元力として重力と表面張力の両方を考慮する．図-1 に示すように，矩形容器幅を l，流体が静止した状態の水深を h とし，容器両端に腹，中央に節を持つ静振波を考える．この静振波は，初期条件として $\eta = 0.01\cos(\pi x_1/l)$ なる液面形を与えることで発生する．なお，計算セル数は，15 × 15 とした．

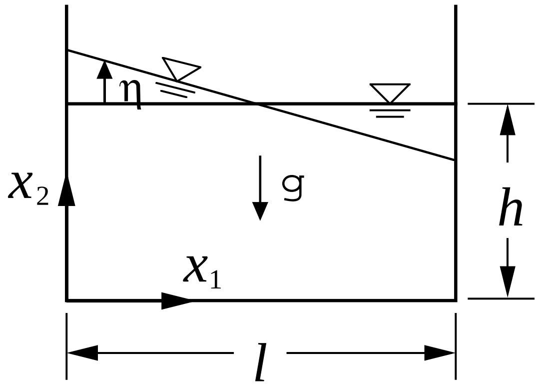

Fig. 1: Geometry and coordinates

$g=1$ かつ $\sigma=0$ (重力波) あるいは $g=0$ かつ $\sigma=1$ (表面張力波) という条件で得られた容器両端 ($x_1=0,\ l$) における η の時間的な変動を図 2 に示す．図中では，$t=0.0$ において $\eta=0.01$ となる曲線が $x_1=0$ における液面変動に相当する．復元力が重力あるいは表面張力のいずれの場合でも，初期の液面形により生じた静振波が減衰せずに持続し，非粘性流体における理論どおりの挙動が再現されている．

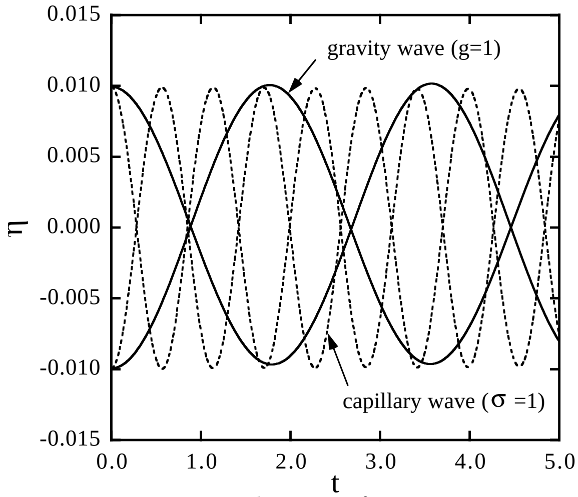

Fig. 2: Time history of η in waves

$g=1$ かつ $\sigma=0$ のときの周期を T_0 とするとき，微小振幅波理論から得られる表面張力を考慮した分散関係式を用いると，T/T_0 は次式のように表される．

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2\alpha}} \tag{17}$$

ここに，$\alpha = \sigma/g$ である．(17) 式と計算値を比較した結果を図-3 に示す．この結果から，重力と表面張力の両者が作用する場合の静振波の周期も適切に再現されることが示された．

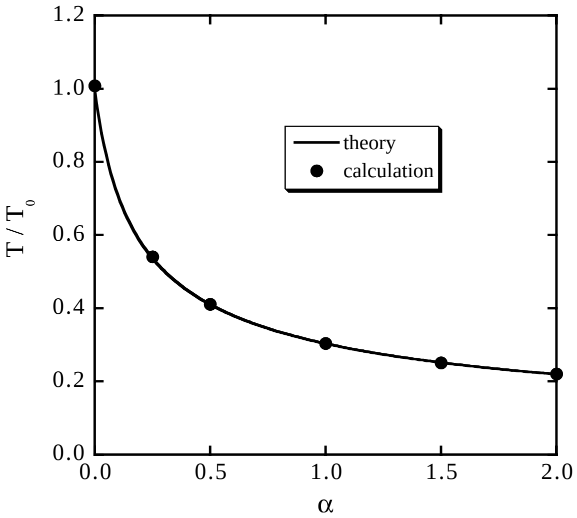

Fig. 3: Comparison of time periods of waves

(2) 流体質量の保存性

2 次元矩形容器内において，静止液面に圧力パルスを作用させ，非線形液面振動が生じた場合の数値計算が行われている [6),7),8),9)]．この振幅が比較的大きい非線形液面振動へ本研究の計算手法を適用し，液面変動や流体質量の保存性などについて検討を加えた．

計算領域は，図 1 において $l = 4.8$，$h = 4.0$ としたもので，次式の圧力パルスを静止液面に作用させる．

$$p_0(t) = \delta(t) \cos\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \qquad (18)$$

ここに，$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である．重力加速度 g と流体の密度 ρ は 1.0，動粘性係数 ν は 0.01，表面張力 σ は 0 とする．計算セル数は 15 × 15 とした．

図 4 は，約半周期にわたる容器両端 ($x_1 = 0,\ l$) の液面振動を Halrow & Welch [10)] の計算結果と比較したものである．上昇する液面変位量が低下する側のそれよりも大きく，非線形な液面変動が生じている．計算結果は，既往計算の結果と概ね一致するものとなった．

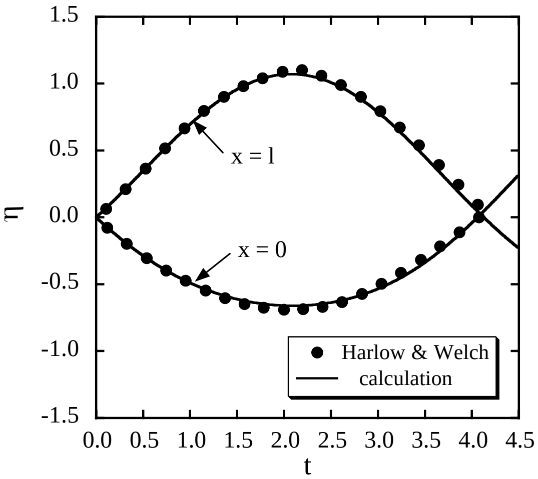

Fig. 4: Time history of η in non-linear waves

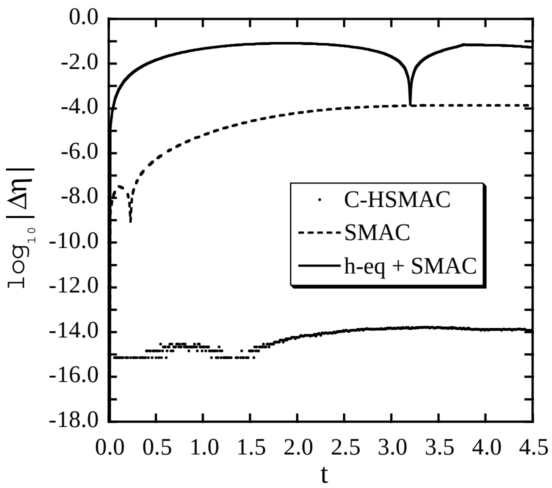

Fig. 5: Error of average liquid depth

上記の非定常計算の過程において，計算領域内の流体質量が十分高い精度で保存されることを確認するため，次式で計算される平均水深の誤差 $\Delta\eta$ を求める．

$$\Delta\eta = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{N} \Delta x_{1_m} h_m - h \qquad (19)$$

$\Delta\eta$ はある時刻の平均水深から初期水深を引いた値であり，Δx_{1_m} と h_m は，それぞれ計算セルの x_1 方向の長さと水深，N は x_1 方向の計算セル数を表す．流体の流出入がないため，理論上は常に $\Delta\eta = 0$ となる．

図 5 に，圧力解法と液面位置の計算法のみを変え，他の計算方法や格子配置などは同一条件とした 3 種類の計算結果を示した．図中の C-HSMAC と SMAC は，圧力解法に C-HSMAC 法および SMAC 法を用い，(16) 式により液面高さを計算した結果である．これらに加えて，圧力解法に SMAC 法，液面位置の計算に次式の物理空間中における液面の動的境界条件を用いた結果 (図中の h-eq + SMAC) を示した．

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_{s2} - u_{s1}\frac{\partial h}{\partial x_1} \qquad (20)$$

ここで，(20) 式の右辺第 2 項の離散化には中央差分を利用した．なお，SMAC 法では流速の発散値を用いた収束判定ができないため，圧力の収束判定値を 10^{-15} とし，C-HSMAC では $D_0^* = 10^{-15}$ とした．これらの圧力の収束計算には SOR 法を用いた．

図 5 に示されるように，(20) 式と SMAC 法を組み合わせた場合には，圧力の収束誤差が十分低いにもかかわらず，$|\Delta\eta|$ の値は 10^{-1} のオーダに達している．従って，この計算条件では，計算領域内の流体質量が大きく増減してしまうことになる．一方，(16) 式と SMAC 法を用いた場合には，誤差は低減し，$|\Delta\eta|$ の値は最大で 10^{-4} 程度となる．(16) 式と C-HSMAC 法を用いた場合には，図 5 に示されるように，$|\Delta\eta|$ の値は最大でも 10^{-14} のオーダに押さえられ，流体質量の保存性が制御された自由液面流れの計算が可能となる．

(3) キャビティ内の自由液面流れ

図-6 に示すような底面が移動壁となる容器内において，内部の流動とそれに伴う自由液面形状の計算を行う．

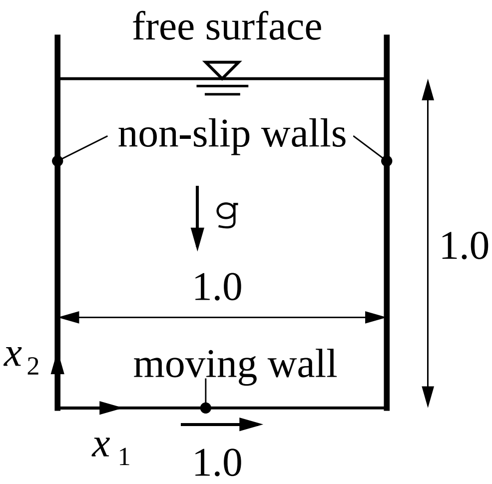

Fig. 6: Geometry and conditions

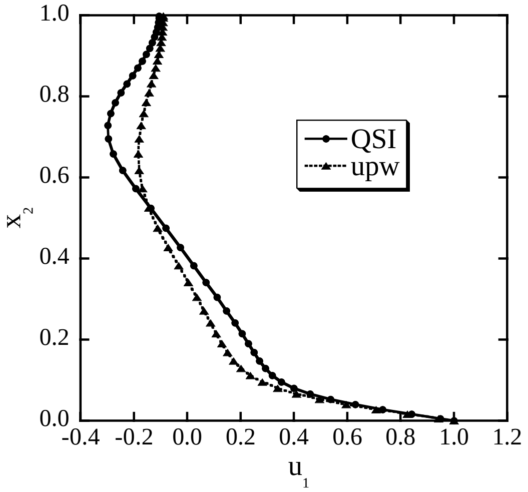

Fig. 7: Vertical distribution of u_1 ($x_1 = 0.5$)

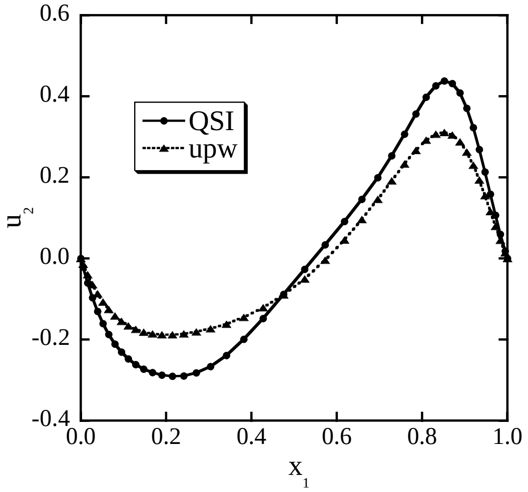

Fig. 8: Horizontal distribution of u_2 ($x_2 \approx 0.5$)

両側面は流速が 0 である non-splip 壁とする．底面の移動速度は 1.0，容器幅と初期水深はともに 1.0 とし，流体の粘性は，移動速度と初期水深に基づく Reynolds 数が 320 となるよう設定した．また，流体の密度は 1.0，重力加速度は 0.5 とした．液面では表面張力および粘性の影響はないものとし，圧力境界条件は $p_s = p_a$，流速境界条件は $\partial u_{si}/\partial \xi_2 = 0$ とした．既報[11] において，より高 Re 数の流れが QSI スキームを用いて 42×42 の不等間隔セルで適切に解かれているので，これと同じ計算格子を用いた．静止状態を初期値とし，非定常計算を続けて定常解を求めた．

移流項に対して風上差分と QSI スキームを用いた 2 種類の計算を行い，結果を比較した．解析により得られた定常状態における水平方向および鉛直方向流速成分 (それぞれ u_1 および u_2) の分布を図-7 と図-8 に示す．QSI スキームで得られた結果と比較すると，u_1 に関しては，自由液面下の負の流速のピーク値が風上差分では明瞭に捕えられていない．また，u_2 に対しては，風上差分では数値粘性が大きく作用している．

図-9 は，定常状態における水深 h の x_1 方向の分布を比較したものである．図に示されるように，移流項に対する計算スキームの違いにより液面形状が異なる結果となった．既報[11] の正方形キャビティ流れの計算結果などを考慮すると，ここでは QSI スキームを用いた計算結果がより真値に近いと考えられる．この結果から，自由液面を有するキャビティ流れのように，液面に対して内部流動の影響が大きい場合に，その形状を正確に求めるためには，単に移動境界面の取り扱い方だけでなく，基礎方程式中の移流項に対して高精度のスキームを用いる必要があることが示された．従って，一般の自由液面流れの問題を扱う場合には，ここで示した QSI 法を組み込んだ流体解析法は有用な手法の一つとなると考えられる．

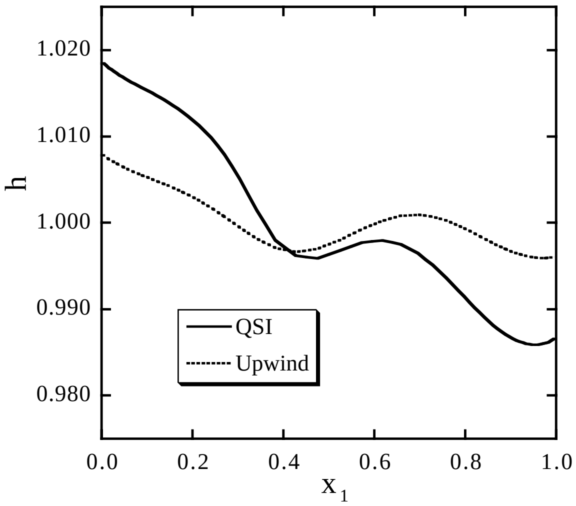

Fig. 9: Comparison of free-surface profiles

4. 結言

自由液面流れを精度良く解析するための計算手法として，特に内部流れの解析精度に着目した考察を行った．格子系として，一般座標系上における collocated 格子配置を採用し，ALE 法に基づき曲線座標系を再生成することで，変形する自由液面形状を扱う方法を用いた．また，移流項に 5 次精度相当の QSI スキームを利用するとともに，流体質量の保存性を高めるために，流速と圧力を同時緩和する C-HSMAC 法と自由液面位置の計算法を示した．

解析手法を重力および表面張力が復元力となる矩形容器内の微小静振波，圧力パルスにより生ずる非線形液面振動および底面が移動壁となる容器内の自由液面流れに適用した．その結果，理論解や既往の数値解析結果と一致する計算結果が得られること，また流体質量の保存性が誤差範囲内に制御されることなどの基本的な検証がなされた．さらに，内部流動が液面に影響を与える場合，液面形状を数値解析で精度良く求めるためには，基礎方程式中の移流項に対して高精度のスキームを用いる必要があり，QSI スキームはこの点で有用性が高いことなどが示された．

参考文献

1. C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 227–253, 1974.

2. 牛島省, 禰津家久, 山上路生, 坂根由季子. 局所 5 次スプライン内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法. 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73–83, 2001.

3. C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525–1532, 1983.

4. C. W. Hirt and J. L. Cook. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324–340, 1972.

5. A. A. Amsden and F. H. Harlow. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322–325, 1970.

6. F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182–2189, 1965.

7. B. Ramaswamy. Numerical simulation of unsteady viscous free surface flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 90, pp. 396–430, 1990.

8. S. Ushijima. Three-dimensional arbitrary Lagrangian-Eulerian numerical prediction method for non-linear free surface oscillation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp. 605–623, 1998.

9. A. Takizawa, S. Koshizuka, and S. Kondo. Generalization of physical component boundary fitted coordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 1213–1237, 1992.

10. F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical study of large-amplitude free-surface motions. *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 5, 1966.

11. 牛島省, 禰津家久, 山上路生, 坂根由季子. 局所 5 次スプライン内挿を利用した高次精度流体解析法. 第 14 回数値流体力学シンポジウム 講演論文集, CD-ROM, E07-3, 2000.