第15回数値流体力学シンポジウム
E07-3

# 並列有限要素法を用いたＶＯＦ法による自由表面流れ解析

Free Surface Flow Analysis Based on VOF Method Using Parallel Finite Element Method

○根本 深, 中央大学大学院理工学研究科, 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27,Email:nemo@kc.chuo-u.ac.jp
桜庭雅明, 日本工営株式会社 情報システム部, 〒102-8539 東京都千代田区麹町 5-4,Email:a4590@n-koei.co.jp
樫山和男, 中央大学理工学部, 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27,Email:kaz@civil.chuo-u.ac.jp
Shin NEMOTO,Dept.of Civil Eng.,Chuo Univ.,Kasuga 1-13-27,Bunkyo-ku,Tokyo,112-8551 Japan
Masaaki SAKURABA,Nippon Koei Co.,Ltd., Kojimachi 5-4, Chiyoda-ku, Tokyo,102-8539 Japan
Kazuo KASHIYAMA,Dept.of Civil Eng.,Chuo Univ.,Kasuga 1-13-27,Bunkyo-ku,Tokyo,112-8551 Japan

This paper presents a parallel finite element method for free surface flow analysis based on VOF method. The stabilized technique based on the SUPG/PSPG formulation is employed. For the solver of nonlinear equation system, the GMRES method based on the Matrix-Free method is employed. In order to compute a large scale problem, the parallel finite element method using the PC cluster is employed. For the numerical example, 3-dimensional broken dam problem is carried out, then the computed result and the parallel efficiency are considered. This method is shown to be a useful tool for the free surface flow analysis.

## 1. はじめに

自由表面を有する流れを解析することは工学上重要な問題である．自由表面流れの解析には，従来，模型実験が主に行われてきたが，近年ではコンピューター性能の向上と，計算機の低廉化及び数値流体力学の進歩から，数値シミュレーションが数多く行われるようになってきている．自由表面流れの解析手法は，Lagrange的移動メッシュを用いて自由表面を直接的に表現する界面追跡手法と，Euler的固定メッシュを用い自由表面を間接的に表現する界面捕捉手法に大別される．界面追跡法の代表的な手法としては，ALE法(Arbitrary Lagrangian Eulerian 法)[1)2)3)]やSpace-time法[4)]などがある．ALE法は自由表面を解析する方法として計算精度が高いが，自由表面の形状が複雑に変形する場合は解析メッシュが破綻してしまうことがあり，適用性に問題が残されている．またSpace-time法は安定でかつ計算精度が高いものの，計算自由度が他の手法に比べて同一の問題に対して倍になることから，計算時間や計算機容量が多大となる問題がある．一方，界面捕捉法にはVOF法(Volume of Fluid 法)[5)6)]やマーカー粒子法[7)]などがある．界面追跡法は自由表面の取り扱いが比較的容易であり，複雑な移動境界の形状，挙動を解析するのに優れている．

本研究では，砕波を含むような複雑な自由表面の挙動にも安定かつ高精度な解を得られる事を目的とし，界面捕捉手法のひとつであるVOF法を用いた解析を行っている．基礎方程式の離散化には，複雑な形状の解析領域に適用が可能なP1/P1（流速/圧力双1次）要素を用い，安定化手法としてSUPG/PSPG(streamline-upwind/Petrov-Galerkin pressure-stabilizing/Petrov-Galerkin) 法[8)9)]を適用した．定式化により導かれた非線形方程式に対し，Newton-Raphson法を用いて線形化を行い，得られた線形方程式を，Matrix-Free法に基づくGMRES法[10)11)]により解いている．また，大規模問題への適用を可能とするため，分散メモリー型並列計算機を対象とした並列計算手法[3)12)]を適用している．並列計算法として，領域分割に基づく方法を用い，通信には機種依存性のないMPI(Message Passing Interface)を使用した．なお，並列計算機には自作のPCクラスター型並列計算機を用いている．

本手法の有効性を検討するため，数値解析例として3次元ダムブレイク問題の解析を行い，既存の実験値との比較と，並列化効率について検討を行った．

## 2. 数値解析手法

### 2.1. 流れ場の計算

#### 2.1.1. 基礎方程式

本研究が対象とする非圧縮粘性流体の基礎方程式は以下の(1)，(2)に示すNavier-Stokesの運動方程式と非圧縮流体の連続の式で表される．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j u_{i,j}-f_i\right)-\sigma_{ij,j}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (2)$$

ここで，$\rho$は密度，$u$は流速，$f$は物体力，$\sigma_{ij}$は式(3)で表される応力テンソルである．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{3}$$

$p$は圧力，$\mu$は粘性係数である．ここで，各節点の密度$\rho$，粘性係数$\mu$は以下の式(4)，(5)で決定される．

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi) \tag{4}$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \tag{5}$$

ここに，$\phi$は界面関数であり，添え字$g$，$l$はそれぞれ，気体，液体を表す．界面関数は，液体領域で$\phi = 1.0$，気体領域で$\phi = 0.0$，自由表面で$\phi = 0.5$とする．

なお，基本境界条件，自然境界条件はそれぞれ式(6)，(7)のとおりである．

$$u_i = \hat{u}_i \qquad \text{on} \quad \Gamma_g \tag{6}$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} \cdot n_j = \hat{h}_i \qquad \text{on} \quad \Gamma_h \tag{7}$$

ここに，$\Gamma_g$，$\Gamma_h$はそれぞれ，基本境界条件，自然境界条件の与えられる境界を示している．

#### 2.1.2. 安定化有限要素法による定式化

本論文では，基礎方程式の定式化にはP1/P1 要素を用いた安定化有限要素法(SUPG/PSPG 法)[8]を適用する．流速，圧力それぞれの重み関数を$w_i$，$q_i$とすると式(8)のような弱形式が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w_i \cdot \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - f_i \right) d\Omega \\
&+ \int_\Omega w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_\Omega q_i u_{i,i} d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{supg} u_j w_{i,j} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k} - f_i \right) - \sigma_{ik,k} \right] d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} q_{,i} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k} - f_i \right) - \sigma_{ik,k} \right] d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{cont} w_{i,i} \rho u_{j,j} d\Omega = \int_{\Gamma_h} w_i \hat{h}_i d\Gamma
\end{aligned} \tag{8}$$

左辺第1〜3項は式(1)，(2)に対する通常のガラーキン項，第4項は上流化項（SUPG項），第5項は圧力安定化項（PSPG項），第6項は衝撃捕捉（shock-capturing）項である．なお，上式の$\tau_{supg}$，$\tau_{pspg}$，$\tau_{cont}$は安定化パラメータであり，それぞれ式(9)，(10)，(11)のように決めている．

$$\tau_{supg} = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 \left\| u_i^h \right\|}{h_e} \right)^2 + \left( \frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \tag{10}$$

$$\tau_{cont} = \frac{h_e}{2} \left\| u_i^h \right\| z(Re_u) \tag{11}$$

ここで，$h_e$は要素サイズであり式(12)のように決めている．

$$h_e = 2 \left( \sum_{e=1}^{nelm} s_i \cdot N_{\alpha,i} \right)^{-1} \tag{12}$$

$s_i$は流速の単位ベクトル，$N_\alpha$は形状関数である．また，$Re_u$は要素レイノルズ数であり，関数$z$は式(13)のように決めている．

$$z(Re_u) = z \left( \frac{\left\| u_i^h \right\| h_e}{2\nu} \right) = \begin{cases} Re_u/3 & 0 \leq Re_u \leq 3 \\ 1 & 3 < Re_u \end{cases} \tag{13}$$

#### 2.1.3. 有限要素方程式

式(8)にP1/P1 要素を用いて離散化を行い，有限要素方程式を導くと以下の式(14)，(15)のようになる．

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{N}(u_j) + \mathbf{N}_\delta(u_j)) u_i \\
&\quad + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\delta) u_i - (\mathbf{G} + \mathbf{G}_\delta) p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\delta
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\left( \mathbf{G}^t + \mathbf{G}_\epsilon^t \right) u_i + \mathbf{M}_\epsilon \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{N}_\epsilon(u_j) u_i \\
&\quad + \mathbf{K}_\epsilon u_i + \mathbf{G}_\epsilon p = \mathbf{E} + \mathbf{E}_\epsilon
\end{aligned} \tag{15}$$

ここに，$u$は流速，$p$は圧力，$\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{G}$，は係数行列，$\mathbf{F}$，$\mathbf{E}$は外力ベクトルであり，添字$\delta$，$\epsilon$はそれぞれSUPG法，PSPG法に起因する事を示している．なお，運動方程式の時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用し，圧力及び連続式の流速に関しては陰的に扱った．

### 2.2. 自由表面の計算

#### 2.2.1. 基礎方程式

自由表面の運動学的条件は，自由表面上の流体粒子は常に自由表面上に存在することである．そこで以下の式(16)に示す，流れ場の計算で求めた流速$u_i$を用いた界面関数$\phi$についての移流方程式を解く事で自由表面の位置を求めることができる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{16}$$

#### 2.2.2. 安定化有限要素法による定式化

基礎方程式(16)の定式化に安定化有限要素法(SUPG法)を適用し，関数$\phi$の重みを$w$とすると式(17)のような重み付き残差方程式が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} \right) d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_\phi u_i w_{,i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \phi_{,j} \right) d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

なお，上式の$\tau_\phi$は安定化パラメータであり式（18）のように決めている．

$$\tau_\phi = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 \| u_i^h \|}{h_e} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

#### 2.2.3. 有限要素方程式

式 (17) に三角形1次要素を用いて補間を行い，有限要素方程式を導くと式 (19) のようになる．

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_{\delta})\frac{\partial \phi}{\partial t}+(\mathbf{N}(u_i)+\mathbf{N}_{\delta}(u_i))\,\phi=0 \qquad (19)$$

ここにM，Nは係数行列である．なお，時間方向の離散化にはCrank-Nicolson 法を用いている．

### 2.3. 非線形方程式の解法

有限要素方程式 (14)，(15) は非線形の方程式である．流体の挙動を正確に解析するためには，この非線形方程式を精度良く解く必要がある．Fig.1 に本解析のフローチャートを示す．非線形方程式系に対してNewton-Raphson 法に基づく反復計算を用いて解を求める．また，反復過程における線形方程式の解法には，大規模計算に有利な，Matrix-Free 法に基づく GMRES 法を適用している．計算方法は以下に説明するとおりである．

#### 2.3.1. Newton-Raphson法による反復解法

(14)，(15) に示す非線形方程式を，次のような連立方程式で表す．

$$\mathbf{R}\,(d_{n+1})=0 \qquad (20)$$

ここで，$d_{n+1}$は，$n+1$ステップにおける未知量である．式 (20) に対し，Newton-Raphson 法を適用すると，式 (21)，(22) に示す線形方程式が導かれる．

$$\mathbf{J}^k_{n+1}\left(\Delta d^k_{n+1}\right)=-\mathbf{R}\left(d^k_{n+1}\right) \qquad (21)$$

$$\mathbf{J}^k_{n+1}\left(\Delta d^k_{n+1}\right)=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial d^k} \qquad (22)$$

ここで，$k$はNewton-Raphson 法の繰り返し計算におけるステップを表し，$\Delta d^k_{n+1}$は，$d^k_{n+1}$に対する増分である．式 (21) は，各時間ステップにおいて収束するまで繰り返し計算される．

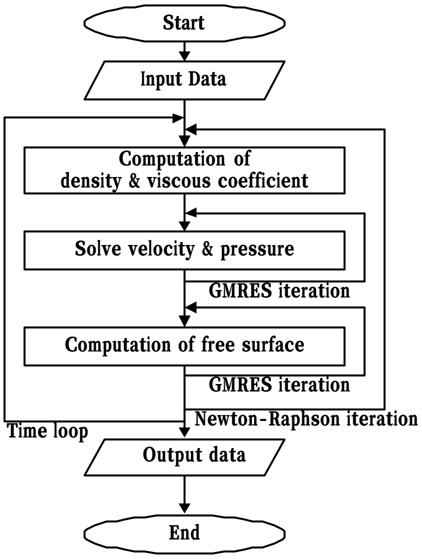



**Fig.1. Flowchart of VOF method using GMRES method**

#### 2.3.2. GMRES法による連立1次方程式の解法

線形方程式 (21) の解法として用いるMatrix-Free 法に基づく GMRES 法[10) 11)]のアルゴリズムはFig.2に示すとおりである．inner loop では，ユーザーの決定する反復回数まで反復計算を行い，outer loop では，それまでの段階で得られた近似解を初期近似解として，リスタートさせている．また，Matrix-Free 法を適用し，反復計算の過程で，要素内の行列とベクトルの積の重ねあわせを行っているループ内で，要素ごとの行列を作成している．これにより要素ごとの行列を記憶する必要がなくなるので，大規模な問題へに対して有利となっている．

### 2.4. 並列計算法

本研究では，大規模な問題への適用を図るため，分散メモリー型並列計算機を用いた領域分割法に基づく，並列計算手法を適用している．領域分割法に基づく並列計算では，各プロセッサーは，割り当てられた部分領域のデータしか記憶しておらず，計算を行うには不十分である．この不足分を各プロセッサー間で通信を行うことで補完する．Fig.2 に示されるGMRES 法のアルゴリズム中で①,②は，通信を必要とする計算である．①は部分領域のベクトルの内積計算を全体領域で完成させる際に行う全プロセッサ間通信であり，②は要素ごとのベクトルを全体系のベクトルに重ね合わせる際に行う隣接プロセッサ間通信である．これらの通信を行うための通信ライブラリーにはMPI (Message Passing Interface) を用いている．

本手法における並列計算の手順を以下に示す．

1. 解析領域全体に関する計算データから領域分割法により，部分領域データ及び部分領域境界上の節点データを作成する．
2. 各プロセッサーは割り当てられた部分領域に関するデータを読み込む．
3. 各プロセッサーは割り当てられた部分領域の，線形連立方程式 (21) を作成する．
4. 隣接プロセッサー通信と全プロセッサー通信を行い，流速と圧力を求める，
5. 各プロセッサーは割り当てられた部分領域の，移流方程式に関する連立方程式を作成する．
6. 隣接プロセッサー通信と全プロセッサー通信を行い，界面関数分布を求めて自由表面位置を決定する．
7. Newton-Raphson 法により，解が収束するまで3〜6 を繰り返す．
8. 時間ステップが終了するまで3〜7を繰り返す．

なお，使用した並列計算機の諸量は Table.1 に示すとおりであり，8 台のPC(Personal Computer) をEthernet で接続した．

GMRES outer iterations
**for** $l = 1, ..., n_{outer}$
compute initial residual
$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}_0}_{\text{①}}$$
define first Krylov vector
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \underbrace{||\mathbf{r}_0||_2}_{\text{②}}$$
initial right hand side
$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0$$
GMRES inner iteration
**for** $j = 1, ..., n_{inner}$
matrix-vector product
$$\mathbf{w} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{v}_j}_{\text{①}}$$
Gramm-Schmidt orthogonalization
**for** $i = 1, ..., j$
$$h_{i,j} = \underbrace{(\mathbf{w}, \mathbf{v}_i)}_{\text{②}}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - h_{i,j}\mathbf{v}_i$$
$$h_{j+1,j} = \underbrace{||\mathbf{w}||_2}_{\text{②}}$$
define next Kryrov vector
$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}/h_{j+1,j}$$
previous Givens rotations on $\bar{\mathbf{H}}$
**for** $i = 1, ..., j-1$
$$\begin{cases} h_{i,j} = c_i h_{i,j} + s_i h_{i+1,j} \\ h_{i+1,j} = -s_i h_{i,j} + c_i h_{i+1,j} \end{cases}$$
compute next rotation
$$\gamma = \sqrt{h_{j,j}^2 + h_{j+1,j}^2}$$
Givens rotation on $\bar{\mathbf{H}}$
$$c_j = h_{j,j}/\gamma; \quad s_j = h_{j+1,j}/\gamma$$
Givens rotation on $\mathbf{P}$
$$\begin{cases} h_{j,j} = \gamma \\ h_{j+1,j} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} p_j = c_j p_j \\ p_{j+1} = -s_j p_j \end{cases}$$
inner loop convergence check
**if** $|p_{j+1}| < \varepsilon$ **exit loop**

back substitution
$$y_j = h_{j,j}^{-1} p_j$$
form approximate solution
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{j} y_i \mathbf{z}_i$$
outer loop convergence check
**if** $|p_{j+1}| < \varepsilon$ **exit loop**
restart
**else** $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$

**Fig.2. Algorithm of GMRES method**

**Table.1. spcifications for the PC cluster**

| | |
|---|---|
| CPU | PentiumIII 866MHz |
| Cache size | 256kB |
| Memory size | 512MB |
| Network | 100Base-Tx |

## 3. 数値解析例

### 3.1. 解析例 1

本手法の計算精度と並列化効率を検討するためにダムブレイク問題の計算を行った．Fig.3に示すように，$2m \times 0.3m \times 1.0m$ の解析領域に，初期条件として，鉛直に置かれた板によって静止している $0.45m \times 0.30m \times 0.90m$ の水柱を考える．要素分割は，$2.5cm$ 幅 ($80 \times 12 \times 40 \times$ 分割) とし，43173 節点，230400 要素の解析メッシュを用いた．時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$sec とし，液体には水（密度 $998.0\mathrm{kg/m^3}$，粘性係数 $1.01 \times 10^{-3}\mathrm{Ns/m^2}$），気体には空気（密度 $1.205\mathrm{kg/m^3}$，粘性係数 $1.81 \times 10^{-5}\mathrm{Ns/m^2}$）を仮定している．境界はすべて固体壁とし free-slip 条件を与えた．

Fig.4 は，水際線の時刻歴について，既存の実験結果[13) 14)]と本手法による計算結果を比較したものである．本手法の計算結果は，実験値と若干のずれは見られるものの，妥当な結果が得られているといえる．また，Fig.5 は各時刻ステップにおける解析結果（流体領域の形状）を示したものである．水柱が崩れ壁に衝突するまでの過程が精度良く計算できていることが確認できる．

次に，本手法の並列化効率を検討するために，領域をスライス型に分割し，各領域の要素数が等しくなるようにして，並列計算を行った．並列計算におけるプロセッサー数は 1，2，4，8 台として，各台数における並列化効果の検討を行った．Fig.6 は演算速度倍率と並列化効率を示しており，本手法の結果は良好な並列化効率が得られている．

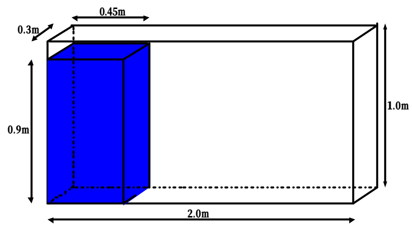



**Fig.3. Computational model**

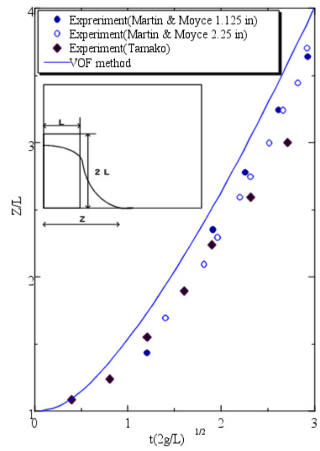



**Fig.4. Time histories of water front location**

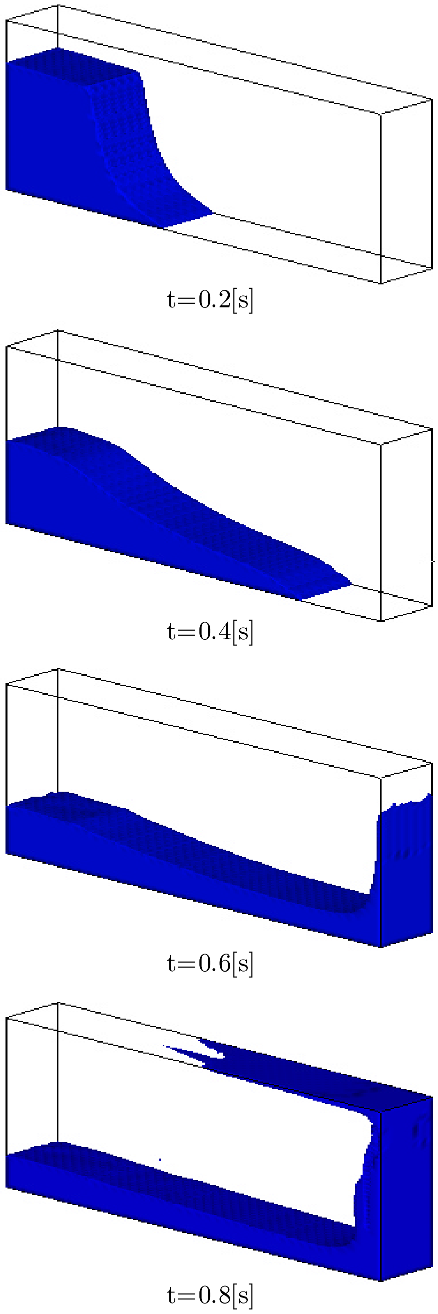



**Fig.5. Computational results from t = 0.2sec to 0.8sec**

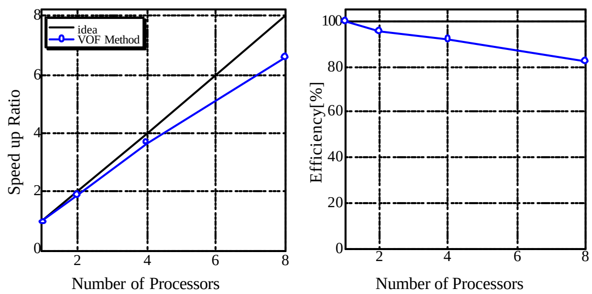



**Fig.6. Parallel performance**

### 3.2. 解析例２

次に，本手法を急縮部，急拡部の存在するダムブレイク問題に適用した．解析モデルはFig.7に示すとおりであり，2.5cm間隔で節点を配置し，117465節点，652800要素のメッシュを用いている．その他の計算条件は解析例１と同じである．

解析領域をGreedy分割アルゴリズムに基づく領域分割法[15)16)]を用いて８つのプロセッサーに割り当て，並列計算を行った．Fig.8，Fig.9は各時刻ステップにおける計算結果（流体領域の形状）を表している．急拡部で水が３次元的に広がる様子，また，壁に衝突して這い上がる様子が捉えられている．

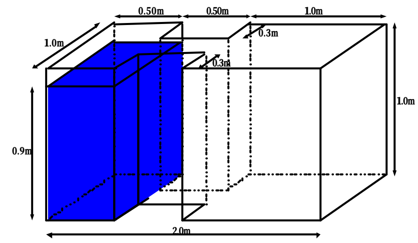



**Fig.7. Computational model**

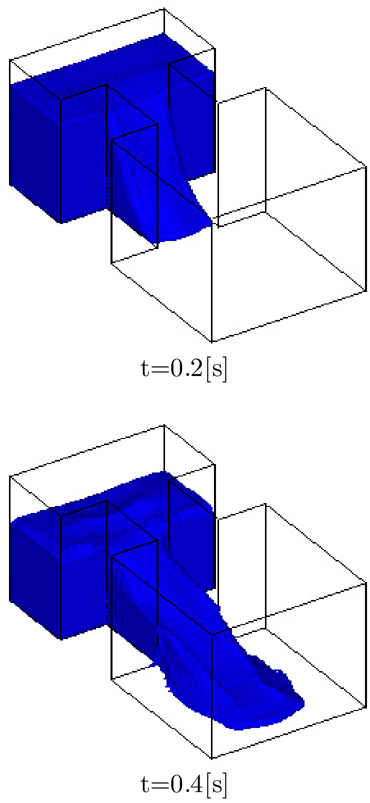
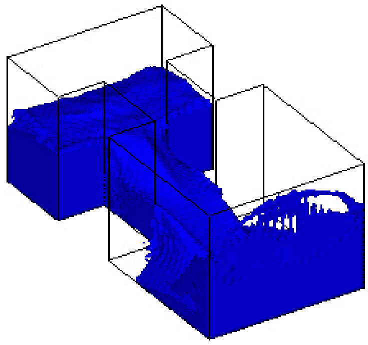
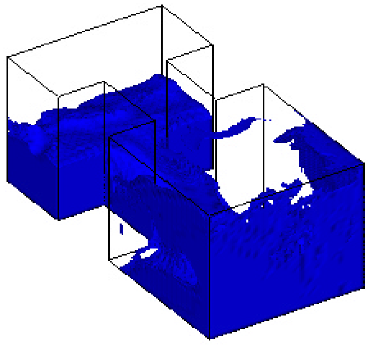



**Fig.8. Computational results t = 0.2 sec and t = 0.4 sec**



t=0.6[s]



t=0.8[s]

**Fig.9. Computational results**
**t = 0.6 sec and t = 0.8 sec**

## 4. おわりに

本論文では，並列有限要素法を用いたVOF法による自由表面流れ解析手法について，計算精度の確認と，並列化効率の検討を行った．数値解析例としてダムブレイク問題を実行し以下のような結論を得た．

- 水際線の移流速度について，本手法と既往の実験を比較した結果，比較的良い一致を示し計算精度の観点から有効性が確認できた．
- 本手法にPCクラスター型並列計算機を用いた並列計算手法を適用した結果，妥当な並列化効率を得る事が出来た．

今後の課題としては，各種問題へ適用すると同時に，砕波などの現象を解析し，自由表面形状を模型実験と比較し，界面捕捉の精度向上に関する検討を予定している．

### 参考文献


1. 岡本隆, 川原陸人 : ALE有限要素法による二次元スロッシング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
2. T. Nomura : ALE finite element computation of fluid-structure interaction problems, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 112, pp.291-308. 1994.
3. 桜庭雅明, 田中聖三, 樫山和男, PCクラスタを用いたALE並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析:応用力学論文集 Vol.4,2001.
4. M. Behr, T. E. Tezduyar : Finite Element Solution Strategies for Large-Scale Flow Simulations, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 94, pp.353-371, 1992.
5. C. W. Hirt, B. D. Nichols : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., 39, pp.201-225, 1981.
6. T. Nakayama and M. Shibata : A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, Comput. Mechanics, 22, pp.194-202, 1998.
7. 中山司, 森峰男 : 剛体着水現象のためのマーカー粒子法を併用した有限要素法, 日本機会学会論文集（B編）, 61巻583号, pp.953-960, 1995.
8. T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray and R. Shih: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 95, pp.221-242, 1992.
9. 桜庭雅明, 田中聖三, 樫山和男 : 同次補間要素を用いた安定化有限要素法による非圧縮粘性流体解析, 土木学会第54回年次学術講演会講演概要集 (第2部),pp.386-387,1999.
10. Z. Johan, T.J.R. Hughes, K.K. Mathur and S.L. Johansson, 'A data parallel finite element method for computational fluid dynamics on the Connection Machine system', Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering , 99, pp113-134, 1992.
11. M. Behr, T. E. Tezduyar, 'Finite element solution strategies for large-scale flow simulations', Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering , 112,pp3-24,1994.
12. 須江克章, 桜庭雅明, 樫山和男: PCクラスターを用いた自作並列計算機の構築とその有効性の検討:計算工学講演論文集:4:pp389-392:1999.
13. J. C. Martin and Moyce. W.J. : An exxperimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp.312-324, 1952.
14. 玉古博朗 : 界面の分裂飛散を伴う流れ解析のための粒子法の開発, 東大修士論文, 160, 1994.
15. C.Farhat : A simple and efficient automatic FEM domain decomposer , Computers & Structurers , 28, pp576-602,1988.
16. C.Farhat, and M. Lesoinne : Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics , Int. J. Num. Meth. Eng. , 36, pp745-764 ,1993.