CCUP 法を用いた水槽内における気液界面の数値解析

Numerical Simulation of Gas/Liquid Interface in Water Tank Using the CCUP Scheme

清水文雄，九工大，〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4, shimizu@mse.kyutech.ac.jp
田中和博，九工大，〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4, kazuhiro@mse.kyutech.ac.jp
畠中清史，九工大，〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4, hatake@mse.kyutech.ac.jp
重藤博司，TOTO，〒253-8577 神奈川県茅ヶ崎市本村 2-8-1, hiroshi.shigefuji@toto.co.jp
清水　剛，TOTO，〒253-8577 神奈川県茅ヶ崎市本村 2-8-1, takeshi.shimizu@toto.co.jp
Fumio SHIMIZU, Kyushu Inst. Tech., 680-4, Kawazu, Iizuka, Fukuoka, 820-8502
Kazuhiro TANAKA, Kyushu Inst. Tech., 680-4, Kawazu, Iizuka, Fukuoka, 820-8502
Kiyoshi HATAKENAKA, Kyushu Inst. Tech., 680-4, Kawazu, Iizuka, Fukuoka, 820-8502
Hiroshi SHIGEFUJI, TOTO Ltd., 2-8-1, Honson, Chigasaki, Kanagawa, 253-8577
Takeshi SHIMIZU, TOTO Ltd., 2-8-1, Honson, Chigasaki, Kanagawa, 253-8577

In the present study, two- and three-dimensional computational programs have been constructed to solve gas/liquid interface in a water tank using the CCUP (Cubic Interpolated Propagation method and Combined, Unified Procedure) scheme. To track the large scale motion of the interface, a density function has been introduced. To verify the programs, several problems in two- and three-dimensions have been simulated. In all cases, the variation of the gas/liquid interface has been captured successfully.

１．はじめに

節水・環境対策・デザイン性により，トイレタンクに対する小型化の要求が高まっている．しかし，タンクの小型化は，タンク内流動による巻込み渦の発生を招き，水の安定供給を阻害する恐れがある．本研究は，水槽内に生じる巻込み渦の発生メカニズムの解明，及び適切なタンク形状や大きさなどに関する知見を得ることが最終的な目的である．しかし，流体力学的に見ると，水槽内の流れは空気と水の気液二相流であり，かつ，巻込み渦のような大きな変形を伴う自由表面流れであるため，数値的に解析するには非常に難しい問題である．そこで，まずは，気液による大変形自由表面流れを扱うことのできる数値計算コードの開発及び検証に主眼をおいて研究を行うことにした．

自由表面を伴う流動解析は近年盛んに研究されているテーマのひとつであり，計算手法に関しても MAC 法(Marker and Cell method)[1]，VOF 法(Volume of Fluid method)[2]，Level-Set 法[3]，粒子法[4]，CIP 法(Cubic-Interpolated Propagation method)[5]など数多くの方法が存在するが，将来的には固体をも含む固気液三相流解析を行う予定であるため，固体・液体・気体を統一的に扱う CIP 法を基にした CCUP 法(CIP and Combined, Unified Procedure)[5]を用いることにした．

２．計算方法

２-１．支配方程式

支配方程式には，連続の式，Navier-Stokes 方程式，エネルギの式を用いる．CCUP 法では気相・液相によらず統一的に記述された非保存系の支配方程式を使用し，ベクトル表示では，以下のように書き表せる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho = -\rho\nabla\cdot\vec{u} \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{\mu}{\rho}\left\{\nabla^2\vec{u} + \dfrac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right\} + \vec{K} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p = -\rho c^2\nabla\cdot\vec{u} \end{cases} \qquad (1)$$

ここで，ρは密度，$\vec{u}$ は速度ベクトル，pは圧力である．また，$\vec{K}$は外力項を表し，本研究では重力を考慮していることから，$\vec{K} = (0, 0, -g)$となる．c は音速，μ は粘性係数であるが，これらの値は気相と液相で異なる値を持つ．したがって，局所的に分布する気相・液相に応じて，c 及びμ の値を変化させる必要がある．

本研究では，自由表面である気液界面を明確に区別するために，気相において 0，液相において 1 となるような密度関数ϕ を導入した．この密度関数は，以下に示す移流方程式に支配されると仮定する．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\phi = 0 \qquad (2)$$

式(2)のまま計算を行うと，数値粘性の影響で気液界面が著しく拡散するため，ϕ に tan 関数による変数変換を施し，数値粘性の影響が低減するようにした[6]．すなわち，

$$F = \tan\{c_{99}\pi(\phi - 0.5)\}, \qquad (3)$$

で変換された関数 F に関する移流方程式，

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)F = 0, \qquad (4)$$

を支配方程式として式(1)と一緒に解き，必要に応じて F からϕ を逆変換により求める．ただし，式(3)中のc_{99} は$\pm\infty$ を防ぐための係数であり，通常$c_{99} = 0.99$ とする．

本研究では，気相として空気を，液相として水を仮定する．したがって，両者の密度比は 1000 倍となる．また，空気及び水の音速は次式から求められる．

$${c_{air}}^2 = \gamma\frac{p}{\rho}, \quad {c_{water}}^2 = \kappa\frac{p+B}{\rho} \qquad (5)$$

ここで，γ は空気の比熱比，κ, Bは実験式から求められた係数であり，それぞれ，$g = 1.4$，$k = 7.15$，$B = 304.9$[MPa]の値を持つ．さらに，空気と水の粘性係数は，それぞれ，$\mu_{air} = 1.82\times10^{-5}$[Pa·s]，$\mu_{water} = 1.002\times10^{-3}$[Pa·s] である．式(1)を解く際に使われる局所音速及び局所粘性係数は，以下のように密度関数を用いて算出した．

$$\begin{cases} c^2 = (1-\phi){c_{air}}^2 + \phi\cdot{c_{water}}^2 \\ \mu = (1-\phi)\mu_{air} + \phi\cdot\mu_{water} \end{cases} \qquad (6)$$

2-2．CCUP 法

CCUP 法（CIP 法）では，支配方程式を「移流項」と「非移流項」とに分離し，それぞれを別々に計算するという手順を踏む．もともと支配方程式が非保存系で記述されているため，移流項と非移流項への分離は容易である．また，移流項の計算では 3 次の Hermite 補間を用い，補間係数の算出に，物理量の値，及び物理量の空間 1 階微分値を使用する．したがって，物理量だけでなく物理量の 1 階微分に関しても各時間ステップ毎に計算することになる．

計算手順を説明するために，1 次元の支配方程式を以下のように記述する．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=H \tag{7}$$

ここで，f は物理量を，Hは移流以外の項を全てまとめて表したものである．また，式(7)を微分して，物理量の空間 1 階微分に関する方程式を導く．

$$\frac{\partial (f_x)}{\partial t}+u\frac{\partial (f_x)}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial x}-(f_x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

ここで，$f_x=\partial f/\partial x$ である．これら式(7)及び式(8)を，「移流項」と「非移流項」とに分離すると，以下のようになる．

・移流項

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial (f_x)}{\partial t}+u\frac{\partial (f_x)}{\partial x}=0 \tag{9}$$

・非移流項

$$\frac{\partial f}{\partial t}=H,\quad \frac{\partial (f_x)}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x}-(f_x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{10}$$

移流項を解く際には，3 次の Hermite 補間を用いて，以下のように計算する．

$$\begin{aligned} f_j^* &= a_j\xi^3+b_j\xi^2+(f_x)_j^n\xi+f_j^n \\ (f_x)_j^* &= 3a_j\xi^2+b_j\xi+(f_x)_j^n \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，

$$a_j=\frac{2\left(f_j^n-f_{jup}^n\right)}{D^3}+\frac{(f_x)_j^n+(f_x)_{jup}^n}{D^2},$$

$$b_j=\frac{-3\left(f_j^n-f_{jup}^n\right)}{D^2}-\frac{2(f_x)_j^n+(f_x)_{jup}^n}{D},$$

$$\xi=-u\Delta t,\quad D=x_{jup}-x_j.$$

ただし，下添字 j, jup はインデックスを表し，jup は流れの向きに応じて以下のように取り扱う．

$$\begin{cases} jup=j-1 & u\ge 0 \\ jup=j+1 & u<0 \end{cases}$$

また，上添字$n,*$は時間ステップを表している．

多次元問題の場合には，各次元を分離して解く分離解法を用いることにより，全空間への移流を計算することができる．ただし，ここで注意しなければならないのは，移流方向と空間微分の方向が異なる場合である．例えば，x 方向への移流を計算する際の y 方向微分値は，以下のように計算する．

$$(f_y)^*=(f_y)^n-\frac{\Delta t}{2}\left\{\left[u\frac{\partial (f_x)}{\partial y}\right]^*+\left[u\frac{\partial (f_x)}{\partial y}\right]^n\right\} \tag{12}$$

y, z 方向への移流に関しても同様の手順によって計算できる．

非移流項に関しては，以下のような手順で計算する．

$$\begin{cases} \nabla\left\{\dfrac{1}{\rho^n}\nabla p^*\right\}=\dfrac{p^*-p^n}{\rho^n c^2(\Delta t)^2}+\dfrac{1}{\Delta t}\nabla\vec{u}^n \\ \vec{u}^*=\vec{u}^n-\dfrac{\Delta t}{\rho^n}\nabla p^* \\ \rho^*=\rho^n+\dfrac{1}{c^2}\left(p^*-p^n\right) \\ F^*=F^n+\dfrac{F^n}{\rho^n c^2}\left(p^*-p^n\right) \end{cases} \tag{13}$$

CCUP 法は圧力ベースの解法であるため,先に圧力を計算し，その後，速度，密度，密度関数を解いていく．式(13)中，圧力に関してはポアソン方程式となる．このため，反復法を用いて計算を行う必要があり，本研究では SOR 法を用いている．また，空間 1 階微分値，例えば，x 方向微分値に関しては，以下のようになる．

$$\begin{aligned}(f_x)^*=&(f_x)^n+\frac{\partial}{\partial x}\left(f^*-f^n\right) \\ &-\Delta t\left[(f_x)\frac{\partial u}{\partial x}+(f_y)\frac{\partial v}{\partial x}+(f_z)\frac{\partial w}{\partial x}\right]^n\end{aligned} \tag{14}$$

移流項と非移流項を交互に計算することにより，1 時間ステップΔt あたりの計算が終了する．

CCUP 法による計算で問題となるのは，保存則が満足されているかという点である．支配方程式が非保存系であるため，計算結果が保存則を満足している保証がない．そのため，シミュレーションの際には，保存性に関する確認を行う必要がある．

2-3．有理関数 CIP 法

通常の CIP 法は単純な 3 次補間を用いて移流計算を行っているが，より安定に計算を進めるために，本研究では有理関数 CIP 法(7)を用いることにした．これは，有理関数 CIP 法が単調性と凹凸性を維持するためである．以下にその手順を示す．

$$\begin{cases} f_j^*=\dfrac{a_j\xi^3+b_j\xi^2+(f_x)_j^n\xi+f_j^n+\alpha B\xi\cdot f_j^n}{1+\alpha B\xi} \\ (f_x)_j^*=\dfrac{3a_j\xi^2+2b_j\xi+(f_x)_j^n+\alpha B\xi\left(2a_j\xi^2+b_j\xi\right)}{\left(1+\alpha B\xi\right)^2} \end{cases} \tag{15}$$

ここで，

$$a_j=\frac{-1}{D^2}\left\{\left(S-(f_x)_j^n\right)+\left(S-(f_x)_{jup}^n\right)\left(1+\alpha BD\right)\right\}$$

$$b_j=\frac{1}{D}\left(S-(f_x)_j^n\right)-aD+\alpha BS,$$

$$B=\frac{1}{D}\left\{\left|\frac{S-(f_x)_j^n}{S-(f_x)_{jup}^n}\right|-1\right\},\quad S=\left[\frac{f_{jup}-f_j}{D}\right]^n,\quad \alpha=1,$$

である．$\alpha=0$ の場合には通常の CIP 法になる．

3．計算条件

代表長さ L に対して$6L\times 6L\times 6L$ の大きさを持つ水槽内へ,水が流出または流入する問題を考える．側面及び下部境界は滑りなし条件を課し，上部境界については自由流入出条件を与えた．初期状態として，水槽の半分程度を水が満たしているものとする．図 1 に示すような位置に，出口境界もしくは入口境界を設定することにより，流出問題または流入問題を計算することができる．計算は 2 次元及び 3 次元で行うものとし，2 次元問題の場合には 61*61，3 次元問題の場合には 51*51*51 の等間隔な計算格子を用いた．また，数値的な圧力振動を抑制するために，staggered grid を用いている．

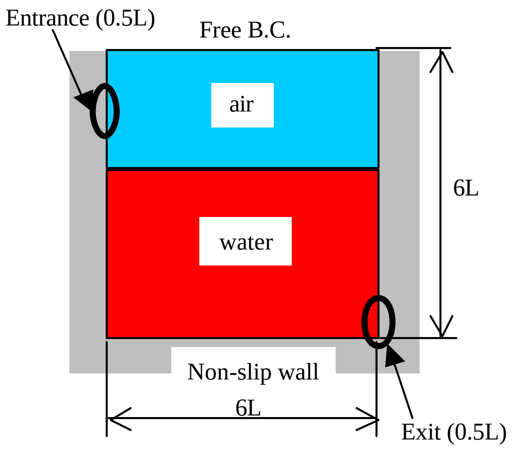


Fig. 1 Computational condition

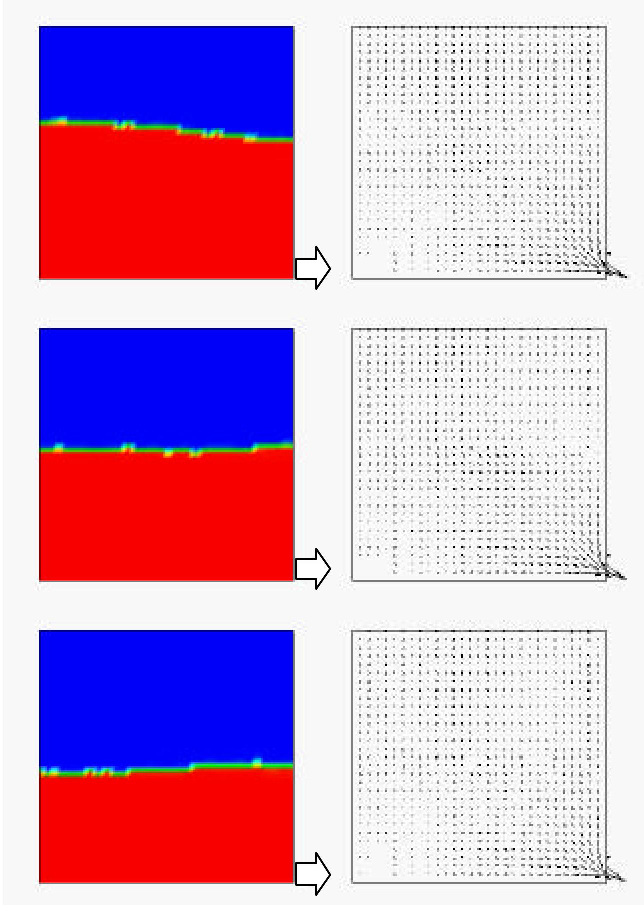

(a) Density (b) Velocity vectors

Fig. 2 Computational results of 2-D outflow problem

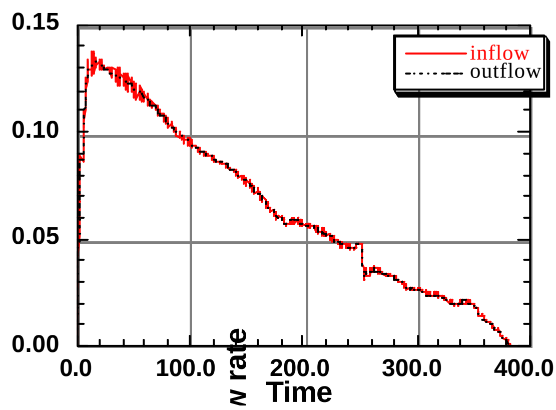


Fig. 3 Time history of flow rate

４．計算結果及び考察

４-１．２次元流出問題

まず，２次元の流出問題を扱う．右側境界の下部に高さ0.5Lの出口を設定し，大気に開放されて水が流出する様子を計算した．図２に３つの時刻における密度分布及び速度ベクトルを示す．時間の経過に伴う水面低下の様子がよく捉えられている．出口を右側に設定したため，開放直後は右側の水面が低下し，その後左側水面が低下するといった，左右で水面の低下速度が異なっている様子が分かる．比較的格子間隔の粗い計算であるにも拘わらず，気液界面の変動の様子を精度よく捉えることができた．

流量の保存性を考慮すると，出口境界から流出する水の体積流量と，上部境界から流入する空気の体積流量は一致しなければならない．計算結果において，この流量保存が満足されているかを確認するために，流出流量と流入流量の時間的変化を調べた．その結果を図３に示す．流入する体積流量は微小な変動を示しているが，両者はいずれの時間においてもよく一致している．したがって，２次元流出問題においては，流量保存が満足されていることが分かる．

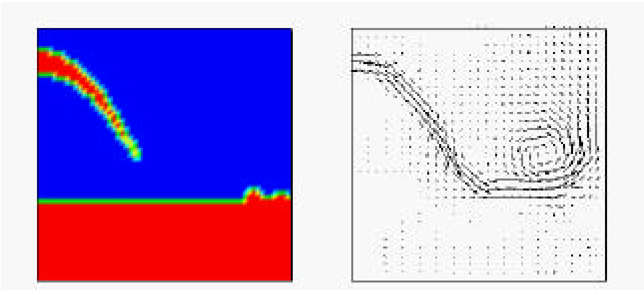
４-２．２次元流入問題

次に，左側境界の上部から水が流入する２次元流入問題を計算した．ある瞬間の密度分布と速度ベクトルを図４に示す．流入する水流の向きは水平方向としたため，水流が放物線状に自由落下している様子が捉えられている．また，水の流入で生じた擾乱によって，空気中には反時計回りの渦が発生していることも分かる．しかし，この計算では，流入した水が下の水面に到達する前に拡散してしまっている．この様子は時間が経過してもほとんど変化しなかった．このような計算結果となった理由は，流量の保存性が満足されていなかったためである．前述の２次元流出問題では，比較的現象が穏やかであるために流量の保存性は良好であったが，ここで行った２次元流入問題では，水の落下という急激な現象の変化が含まれているために，保存性が著しく損なわれたものと思われる．

そこで，流量の保存性を満足させるために，以下のような手段を施すことにした．全計算領域内に存在しなければならない実際の水量をV_{real}とし，各格子点で計算される密度関数から得られる計算上の水量をV_{cal}とすると，$V_{real}-V_{cal}$が数値的に拡散した水の量となるので，この不足分を気液界面に相当する領域に補正する．すなわち，気液界面の面積（３次元の場合には体積）をV_{surf}とすれば，

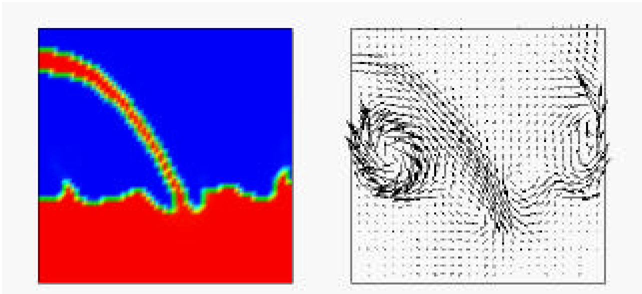
$$\frac{V_{real}-V_{cal}}{V_{surf}}, \qquad (16)$$

で表される補正量を気液界面の密度関数に足し合わせる．これにより，計算領域全体としての流量が保存されることになる．このような処理を施した場合の計算結果を図５に示す．流量が保存されているために，落下途中で拡散することなく水流が下の水面に到達し，水面には着水による擾乱が生じているのが分かる．ただし，今回行った流量の補正に関しては，簡易的な方法で厳密性に欠ける部分があるので，今後さらに検討する必要がある．



(a) Density　　　　　(b) Velocity vectors

Fig. 4 Computational results of 2-D inflow problem (no correction)



(a) Density　　　　　(b) Velocity vectors

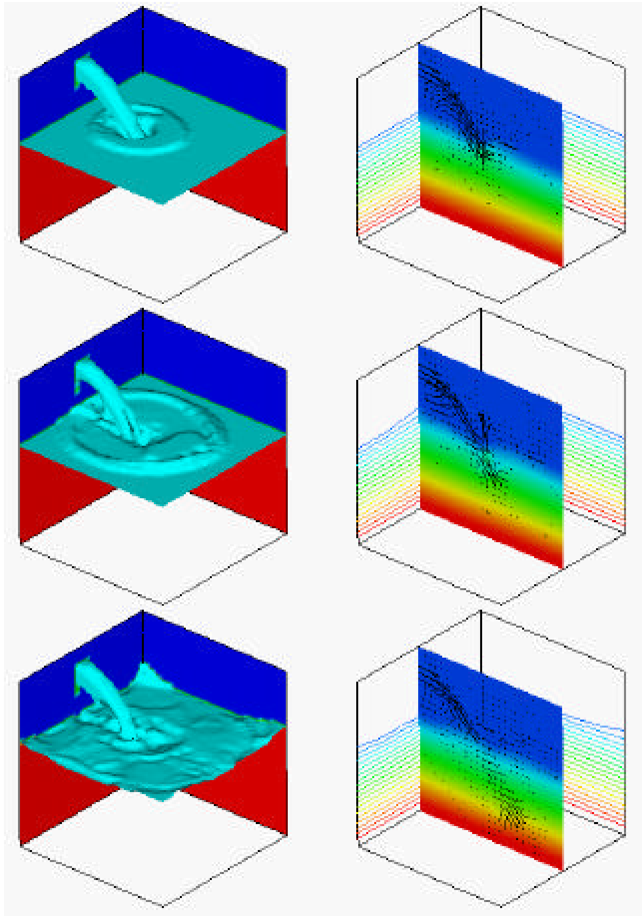
Fig. 5 Computational results of 2-D inflow problem (correction of flow rate)

４-３．3 次元流入問題

最後に，問題を 3 次元へと拡張し，3 次元流入問題を計算した．図 6 に 3 つの瞬間における水面変動の様子と，中央断面内の圧力分布及び速度ベクトルを示す．計算プログラムの 3 次元化は，2 次元のものを単純に 3 次元へと拡張するだけで行うことができる．水流の到達前は水面は静止状態であるが，着水と同時に水面に波紋が生じ，時間経過とともにその波紋が同心円状に広がっていく様子が捉えられている．また，着水部分では，水流の圧力により水面の低下が生じている．このような静止した水面に水流が飛び込む現象は，台所や浴槽などで日常的によく見られる様子であるが，数値計算でも非常によく捉えらることができた．格子間隔の粗い計算(51*51*51)であるにも拘わらず，気液界面の変動の様子がよく分かる結果が得られた．

５．終わりに

流入出する水流によって生じる，水槽内における気液界面変動の様子を，CCUP 法を用いて数値的に計算した．2 次元及び 3 次元の流出問題及び流入問題の解析を試み，いずれの場合においても，気液界面の変動の様子をよく捉えることができた．また，気液界面に補正を施すことにより，流量の保存性を満足することができた．特に，3 次元流入問題では，比較的粗い計算にも拘わらず，着水によって生じる波紋伝播の様子が精度よく捉えられた．今後，水槽内に生じる巻き込み渦の解析を行う予定である．



(a) Behavior of interface　　(b) Pressure and velocity vectors

Fig. 6 Computational results of 3-D inflow problem

参考文献

(1) Welch, J. E., Harlow, F. H., Shannon, J. P., Daly, B. J., “The MAC Method – A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surface,” Los Alamos Sci. Lab. Rep., LA-3425, The Univ. California (1966).

(2) Nichols, B. D., Hirt, C. W., “Methods for Calculating Multi-Dimensional, Transient, Free Surface Flows past Bodies,” Proc. 1st Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, Gaithersburg, Maryland, U.S.A. (1975), pp. 253-277.

(3) Sussman, M., Smereka, P., Osher, S., “A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow,” J. Comput. Phys., **114** (1994), pp. 146-159.

(4) Koshizuka, Oka, Y., “Numerical Analysis of Breaking Waves with Fluid Fragmentation and Coalescence Using Moving-Particle Semi-Implicit Method,” Coll. Paper of CFD Symp. for Free-Surface Flows, Tokyo, Japan (1996), pp. 71-80.

(5) Yabe, T., Wang, P. Y., “Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid,” J. Phys. Soc. Japan, **60**-7 (1991), pp. 2105-2108.

(6) Yabe, T., Xiao, F., “Description of Complex and Sharp Interface during Shock Wave Interaction with Liquid Drop,” J. Phys. Soc. Japan, **62**-8 (1993), pp. 2437-2540.

(7) Xiao, F., Yabe, T., Ito, T., “Constructing Oscillation Preventing Scheme for Advection Equation by Rational Function,” Comput. Phys. Commun., **93** (1996), pp. 1-12.