

非圧縮性流れを主流とする2流体方程式による物体まわりの流れ

Flow around an Obstacle based on 2-fluids Equations with Incompressible Main Flow

坪井一洋, 茨城大・工, 日立市中成沢町4-12-1, tsuboi@dse.ibaraki.ac.jp
Kazuhiro TSUBOI, Dept. Systems Eng., Ibaraki University, 4-12-1 Naka-narusawa, Hitachi, 316-8511

We investigate the behaviour of particle flow around an obstacle placed in uniform incompressible main flow. Particle density in the vicinity of the front stagnation point is, in particular, obtained as a function of Stokes number. Furthermore, in the case of small Stokes number, in which particle impingement does not occur, there exists the exact solution of the flow field of particle phase is obtained. Perturbed solution is also obtained in the reciprocal of Stokes number when the Stokes number is large enough. Comparison between numerical results and these solutions shows good agreement and the peak of particle density appears near the threshold of particle impingement to the body surface. Furthermore, we confirm that some computational results of basic equations support the present result.

1. はじめに

流体中に多数の微粒子を含んだ流れは自然界やさまざまな産業分野で観察される。このような流れのなかで、特に粒子の体積占有率が小さい場合には、2流体モデルによる扱いが可能となる。非圧縮性流れを主流とする2流体粒子流の基礎方程式系は粒子流に対する安定性を調べる目的で Saffman により導かれた⁽¹⁾。その後、この方程式系に関しては、主流にポテンシャル流れを仮定した理論的研究が中心に行われ、いくつかの重要な結果が得られている。

流体中の粒子の振舞いは、その運動に関する緩和時間を表す Stokes 数によって変化する。一様な粒子流中の物体を考えると、物体表面への粒子衝突に対しては Stokes 数に閾値が存在する⁽²⁾。この閾値より小さい Stokes 数の場合、粒子は物体表面に衝突することなく下流へ流出する。このとき、物体表面には Stokes 数のオーダー程度の厚みをもった主流成分のみの無粒子層が形成される^{(3),(4)}。また、粒子密度に関しては物体の前方淀み点で特異性をもつことも指摘されている⁽³⁾。一方、Stokes 数が閾値以上になると、上流の一様な粒子流は、その慣性のため主流の変化に追従できず、物体表面に衝突する。この場合、物体後方には粒子が流れ込まず、粒子流に対する後流が形成される⁽⁵⁾。

しかしながら、これらの研究は低 Stokes 数あるいは高 Stokes 数極限の振舞いが中心であり、有限の Stokes 数に対しては若干の数値解が得られているにすぎない。特に、物体表面の粒子密度が Stokes 数の広い範囲にわたってどのように変化するかについてはほとんどわかっていない⁽⁶⁾。実際、この方程式系の主流として、振動する円柱まわりのポテンシャル流れや非圧縮性粘性流れを用いた場合、あるパラメータ領域で計算が破綻することがある。

ここでは、この方程式系に対するいくつかの数値計算結果を示すとともにこの方程式系の数学的な性質について述べる。特に、円柱の前方淀み点における粒子密度を広い Stokes 数範囲で調べ、粒子衝突の閾値近傍にピークをもつ分布となることを示す。

2. 基礎方程式

一様な粒子流中に置かれた物体を考える。このとき、無限上流での一様流速を U_∞ 、主流密度を ρ_∞ 、粒子流の(質量)密度を η_∞ とする。主流と粒子流の間の相互作用として Stokes の抵抗法則を用いた場合、この2流体流れの基礎方程式系は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\gamma}{\tau} \eta (v_i - u_i) + F_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \eta) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} (v_i) + \frac{1}{\tau} (v_i - u_i) = 0. \quad (4)$$

ここで、 u_i および v_i はそれぞれ主流と粒子流の速度ベクトルであり、一様流速 U_∞ によって無次元化している。また、 η は粒子流密度で η_∞ により無次元化される。なお、式(2)における F_i は粘性項を含めた外力項を意味する。

さて、方程式系(1)-(4)には次式で定義される2つの無次元パラメータが現れる。

$$\tau^{-1} \equiv 3\pi\mu \frac{d}{m U_\infty}, \quad (5)$$

$$\gamma \equiv \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty}. \quad (6)$$

ここで、 d と m は粒子の直径と質量、 D は物体の代表長さである。

方程式(2)および(4)に現れるパラメータ τ は粒子運動の緩和時間を無次元化したもので Stokes 数と呼ばれる。すでに述べたように Stokes 数は粒子の慣性を表すパラメータであり、この値が大きいほど粒子運動における慣性の効果が大きいことを意味する。

一方、パラメータ γ は主流と粒子流の密度比で与えられ、粒子流が主流に与える影響の強さを表す。このパラメータ値については、一般に $\gamma < 1$ を仮定することができる⁽¹⁾。実際、過冷却大気を例にとると $\gamma \sim 10^{-3}$ 程度である。したがって、第1近似としては粒子流の主流への影響を無視することができる。このとき方程式系(1)-(4)は主流に対する式(1)-(2)と粒子流に対する式(3)-(4)に分割することが可能である。ただし、パラメータ γ の影響については次の点に注意する。式(2)から、例えば、2次元流れに対して次の渦度方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_3}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\tau} \left(\eta (\Omega_3 - \omega_3) + \varepsilon_{3jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} (v_k - u_k) \right)$$

ここで、 ω_3 および Ω_3 はそれぞれ主流と粒子流に対する渦度である。この式の右辺第2項は粒子密度に勾配が生じることによって主流に渦度が発生することを意味する。

3. 淀み点近傍での解

密度比 γ の影響を無視した場合でも、粒子流に対する方程式(3)-(4)を解くことは一般に簡単ではない。以下では、主流(u_x)に非圧縮性ポテンシャル流れの一例である淀み点流れを仮定した場合、方程式(3)-(4)に対して解析的に解が求まることを示す。また、その解から考えている方程式系の数学的な性質を明らかにする。

3.1 淀み点流れ

方程式系(1)-(4)と同じ無次元化を行った淀み点流れは次式で与えられる。

$$\begin{cases} u_x = 2Ax, \\ u_y = -\alpha Ay. \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 A は物体形状によって決まる定数である。特に、 $A < 0$ の場合が前方淀み点に対応し、 $A > 0$ は後方淀み点(あるいは剥離点)を表す。また、 α は幾何学的パラメータで2次元あるいは軸対称流に対してそれぞれ2あるいは1となる。

代表的な物体形状に対する定数 A および α の値を Table 1 にまとめる。表中には粒子衝突の閾値となる Stokes 数 (τ_{cr}) も示した⁽²⁾。なお、この値は淀み点流れ内の対称軸上を1次元運動する粒子の運動方程式から求められる。

Table 1 Numerical example of A , α and τ_{cr} .

Geometry	$ A $	α	τ_{cr}
Cylinder	2	2	1/16
Plate	1	2	1/8
Sphere	3	1	1/24
Disc	$4/\pi$	1	$\pi/32$

ここで考える淀み点流れのモデルを Fig.1 に示す。このモデルでは、 $x = L$ で速度 u_x は一様流と等しくなる。なお、同図には比較のために円柱まわりのポテンシャル流れの対応する速度分布も示した。

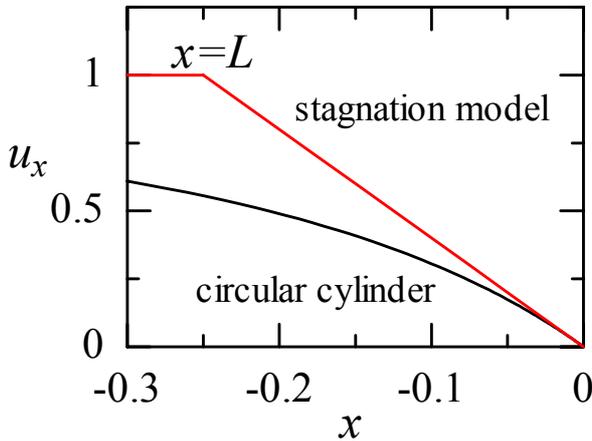


Fig. 1 Velocity profile of stagnation flow model (7) along x -axis.

3.2 粒子衝突のない場合の解

すでに述べたように、Stokes 数が Table 1 にある閾値 τ_{cr} より小さい場合には物体表面への粒子衝突は生じない。このような低 Stokes 数域では、主流として淀み点流れを考えると粒子の速度場は次の形の解をもつことがわかる。

$$\begin{cases} v_x = f(\tau)u_x, \\ v_y = g(\tau)u_y. \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $f(\tau)$ と $g(\tau)$ は τ のみの関数である。

実際、式(8)を式(4)の x 成分に代入すると関数 $f(\tau)$ に対して次の2次方程式が得られる。

$$2A\tau f^2 + f - 1 = 0.$$

このうち、特に $\tau = 0$ のとき $f(\tau) = 1$ となる解は次式で与えられる。

$$f(\tau) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8A\tau}}{4A\tau}. \quad (9)$$

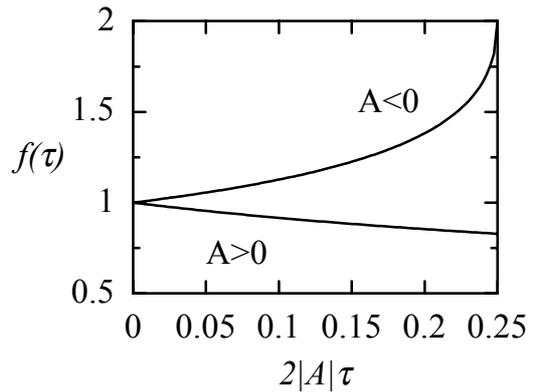
同様に式(4)の y 成分からもう一方の関数 $g(\tau)$ に対しては次の解が得られる。

$$g(\tau) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha A\tau}}{2\alpha A\tau}. \quad (10)$$

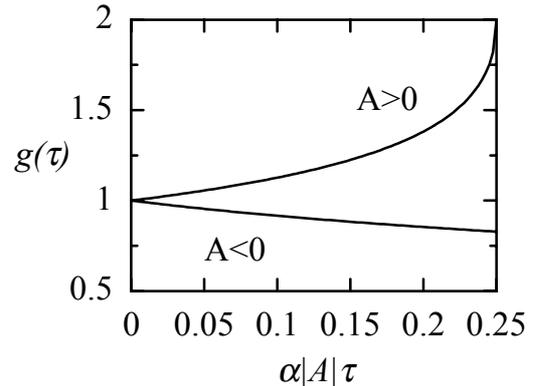
ここで求めた解(8)はその形より“主流に相似な”解と呼ぶことができる。そして、この解が意味をもつのは Stokes 数が以下の範囲であることも容易にわかる。特に、 $A < 0$ に対する上限値は Table 1 に示した粒子衝突の閾値 τ_{cr} と一致することにも注意する。粒子流の影響を表す因子 $f(\tau)$ および $g(\tau)$ の Stokes 数による変化を Fig. 2 に示す。

$$0 \leq A\tau \leq \frac{1}{4\alpha}, \quad A > 0,$$

$$0 \leq |A|\tau \leq \frac{1}{8}, \quad A < 0.$$



(a) Profile of factor $f(\tau)$



(b) Profile of factor $g(\tau)$

Fig. 2 Factors of velocity field as function of Stokes number.

2次元粒子流の淀み点近傍における流線(粒子軌道)を Fig. 3 に示す。図中の原点が淀み点である。粒子の流線が主流と一致する場合(同図(a))と粒子の慣性が最も強く出る場合(同図(b))を比較すると、後者の場合には粒子の慣性による圧縮の影響で流線が右側に偏向する様子がわかる。

さて、粒子流の速度場が求めれば、その密度場は線形偏微分方程式の理論より直接求めることができる。実際、式(8)の速度場を方程式(3)に代入すると、粒子密度に対して次式が得られる。

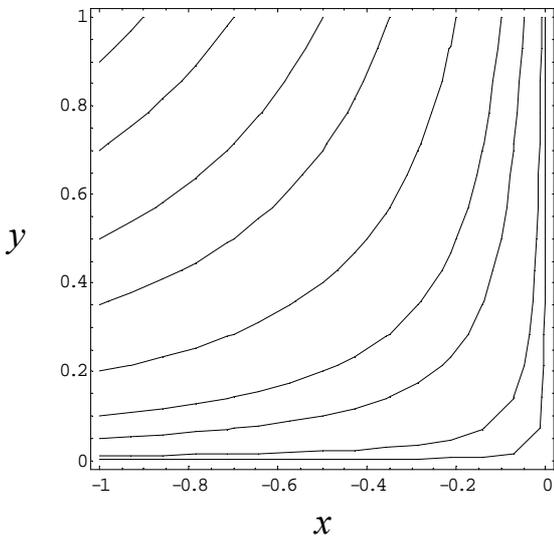
$$\eta = |x|^{g/f-1} F(|x|^{\alpha g} |y|^{2f}) \quad (11)$$

ここで、 F は任意の関数であり境界条件から決まる。また、 $|x|^{\alpha g} |y|^{2f} = \text{const.}$ は粒子流の流線を与えることから、 F は流線に沿って一定となる。

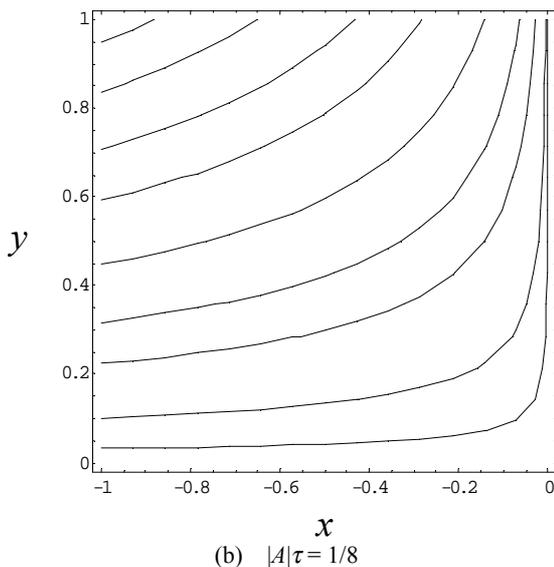
ここで求めた粒子密度に対する解(11)は、上述した Stokes 数の範囲における厳密な解である。特に、その特異性を明確にするために、流線に沿った粒子密度の変化を考える。すなわち、

$$\eta \sim |x|^{g/f-1}, \quad (12)$$

に対して、十分小さな Stokes 数の場合、式(9)および(10)より定数 A の符号に応じて次式が得られる。



(a) $|A|\tau = 0$



(b) $|A|\tau = 1/8$

Fig. 3 Streamlines of particle flow

$$\eta \sim |x|^{(\alpha+2)A\tau}, \quad A > 0$$

$$\eta \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^{(\alpha+2)|A|\tau}, \quad A < 0$$

前者の結果は、後方淀み点（あるいは剥離点）では特異性は現れず有限の τ に対して粒子密度は零になることを示している。一方、後者からは、前方淀み点における粒子密度は $x^{-\tau}$ の形の特異性をもつことがわかる。特に、球の淀み点に対する指数は 9τ となり、これは Michael によって得られた結果と一致している⁽³⁾。

なお、今回得られた解(11)には物体表面に形成される無粒子層の存在は示されていない。この点は、任意の角度をもつ尖状の淀み点に対する数値解からも指摘されている⁽⁷⁾。この事実は、低 Stokes 数流れを特徴づける無粒子層の発生には物体の表面曲率による遠心力が影響していることを示唆する結果である。

3.3 粒子衝突のある場合の解

Stokes 数が閾値よりも大きい場合、個々の粒子は物体表面に達することができる。したがって、このパラメータ領域では前節の相似な解が成り立たないことは明らかである。Stokes 数が無限大の極限を考えると、粒子運動は慣性のみに支配されるため上流の状態のまま物体表面に衝突することになる。したがって、Stokes 数が大きい領域では Stokes 数の逆数による摂動を考えることが可能である。そこで、次の形の解を求めることにする。

$$v_i = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha} v_i^{(\alpha)}, \quad \eta = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha} \eta^{(\alpha)} \quad (13)$$

これらの式を方程式(3)および(4)に代入すると Stokes 数の各オーダーに対して線形化された方程式系が導かれる。

第0次

$$v_j^{(0)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta^{(0)} v_j^{(0)}) = 0. \quad (14b)$$

第1次

$$v_j^{(0)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + v_j^{(1)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} = u_i - v_i^{(0)}, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta^{(0)} v_j^{(1)} + \eta^{(1)} v_j^{(0)}) = 0. \quad (15b)$$

第2次

$$v_j^{(0)} \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + v_j^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + v_j^{(2)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} = -v_i^{(1)}, \quad (16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta^{(0)} v_j^{(2)} + \eta^{(1)} v_j^{(1)} + \eta^{(2)} v_j^{(0)}) = 0. \quad (16b)$$

これらの方程式系に対して Fig. 1 で示した淀み点流れのモデルを用いると次の解が得られる⁽⁸⁾。

$$v_x^{(0)} = 1, \quad v_y^{(0)} = 0, \quad \eta^{(0)} = 1,$$

$$v_x^{(1)} = -\frac{1}{2L}(x+L)^2, \quad v_y^{(1)} = \frac{y}{L}(x+L), \quad \eta^{(1)} = 0,$$

$$v_x^{(2)} = -\frac{1}{2L}(x+L)^2 \left\{ \frac{1}{4L}(x-L)^2 + \frac{1}{3}(2x-L) \right\},$$

$$v_y^{(2)} = \frac{y}{6L^2}(x+L)^2(x+4L),$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{6L}(x+L)^2 \left\{ \frac{1}{L}(x^2+2L^2)+2x-L \right\},$$

ここで、 L は淀み点流れと一様流の接合点である (Fig. 1 参照). 特に、密度 η の第 1 次近似が零となっているが、これは主流が無限上流で一様な場合には恒等的に成り立つことを示すことができる⁽⁸⁾.

速度成分 $v_x^{(1)}$ および $v_x^{(2)}$ の x 軸に沿った変化を Fig. 4 に示す. この図では円柱の淀み点に対応する $L=1/4$ を用いた. なお、 $v_x^{(2)}$ は実際の値を 10 倍した結果であることに注意する. また、この結果から前方淀み点における密度は次の形で与えられることがわかる.

$$\eta = 1 + \frac{1}{96\tau^2}. \quad (17)$$

なお、この領域については接合漸近展開によってより実際の解析が可能になると考えている.

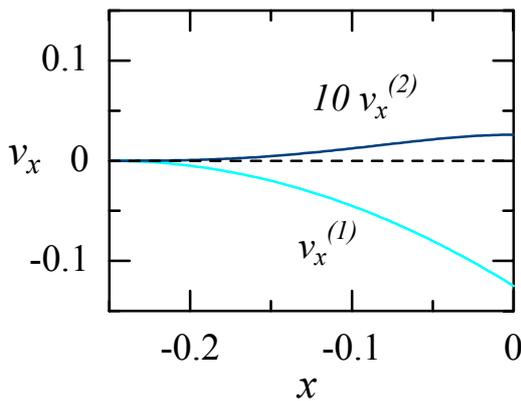


Fig. 4. Velocity profile of $v_x^{(1)}$ and $v_x^{(2)}$ on x -axis.

4. 計算結果

ここでは、基礎方程式系を数値的に解いた結果をまとめる. その際に用いた方程式(4)の境界条件に注意する. 方程式(4)には主流と粒子相の間に作用する粘性効果が含まれているが、この効果は速度場そのものに比例するため、この方程式は双曲型方程式となる. したがって、物体表面の境界条件は粒子軌道に沿った上流側の状態が決まる. 例えば、表面での粒子流速の(外向き)法線成分が負であれば粒子は物体表面を横切り流れ場から消失する. 一方、法線成分が正の場合は表面の沿ったいわゆる「すべり条件」となる.

4.1 前方淀み点密度

数値解と比較するため、 $x=7 \times 10^{-4}$ における粒子密度の厳密解(12)を Stokes 数の関数として描いた結果を Fig. 5 に示す. 同図中の 1 点鎖線は円柱に対する粒子衝突の閾値 $\tau_{cr}=1/16(=0.0625)$ であり、この値より小さい Stokes 数域に対して解(12)が成立する. この図より、粒子衝突の閾値付近で粒子密度が急激に増加することがわかる. 一方、同図には粒子衝突の閾値よりも大きい Stokes 数域での解(17)も示した. すでに述べたように、この解は淀み点流れと一様流を合成した主流モデルを仮定することで得られる高 Stokes 数域での

級数解である. これらの解析結果から、淀み点前方の粒子密度が粒子衝突の閾値付近で急激に増加していることがわかる.

円柱まわりのポテンシャル流れを主流とする方程式系(3)-(4)に対する数値解から求めた前方淀み点近傍の粒子密度に対する結果も Fig. 5 に示した⁽⁹⁾. 例えば、図中の \square は格子数 100×70 の結果であり、 $\delta \sim 7 \times 10^{-4}$ の粒子密度である. ただし、 δ は前方淀み点からの距離である. 同様に、 \square は 200×200 の格子に対して $\delta \sim 8 \times 10^{-5}$ における結果を表す. 数値解においても閾値付近で粒子密度が急激に増加しており、広範囲の Stokes 数域で粒子密度の傾向は解析結果と一致している. 特に、閾値よりも大きい Stokes 数域での解は厳密な円柱まわりの主流を仮定していないにもかかわらず数値解を十分に近似していることがわかる. しかし、数値解の場合には粒子密度を過小に評価していることもわかる. このことは、式(3)に対する数値解を検証する際に注意が必要となることを示している.

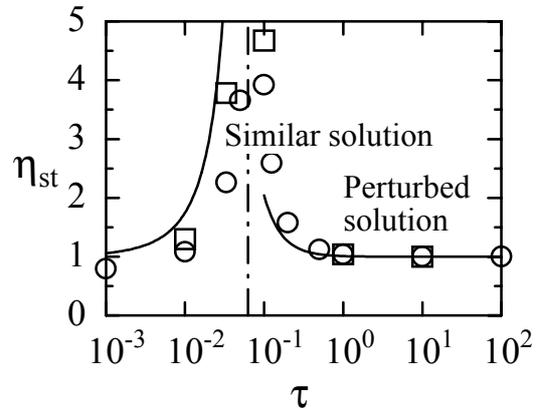


Fig. 5 Comparison of analytical solutions with computational results.

さて、方程式(3)は淀み点近傍では以下の形で評価できる.

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \sim \frac{1}{v_n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

そこで、この式から淀み点での粒子密度の Stokes 数依存性について定性的な分類を行なうことが可能である. その結果を Table 2 に示す.

Table 2. Summary of particle density at the front stagnation point.

	$\text{div } v$	v_n	η
$\tau = 0$	$= 0$	$= 0$	const.
$\tau < \tau_{cr}$	0	$= 0$	
$\tau > \tau_{cr}$	0	0	$<$
$\tau =$	$= 0$	0	const.

例えば、 $\tau =$ の粒子流は一様流の状態では物体に到達できない. したがって、少なくとも上流側の物体表面では法線成分は有限である. また、一様流であるから $\text{div } v = 0$ も成り立つ結果、 $\eta = \text{const.}$ となる. 領域 $\tau > \tau_{cr}$ においても粒子衝突が起きることから法線成分は有限、また、この領域では粒子流は圧縮の影響が生じ一般に $\text{div } v \neq 0$ となるため η の値は有限となりうる.

一方、 $\tau < \tau_{cr}$ の領域ではもはや粒子は物体表面に達することができないため法線成分は零である. しかし、圧縮の影響で $\text{div } v \neq 0$ であるから $\eta =$ となる. なお、 $\tau = 0$ の場合には粒子流は主流に完全に追従するため流れ場は非圧縮となり $\eta = \text{const.}$ が成立する.

4.2 流れ場の計算例

まず、主流として円柱まわりのポテンシャル流れを用いた場合の結果を Fig. 6 に示す。この図では下半分に粒子流の密度分布を示している。色は赤が高密度、青が低密度を表す。また、上半分には粒子の運動方程式から求めた流線を示している。いくつかの特徴を示すために $\tau = 0.01$ とした。この値は閾値以下であるから、この場合には粒子衝突は生じていない。実際、上流からの粒子は物体表面に衝突することなく表面付近を流れる。その結果、円柱表面には粒子の存在しない薄い層が形成されている。そして、この層の外側で粒子密度が高くなっている。一方、後方淀み点では粒子密度は零となっており、今回求めた解析解と定性的に一致していることがわかる。

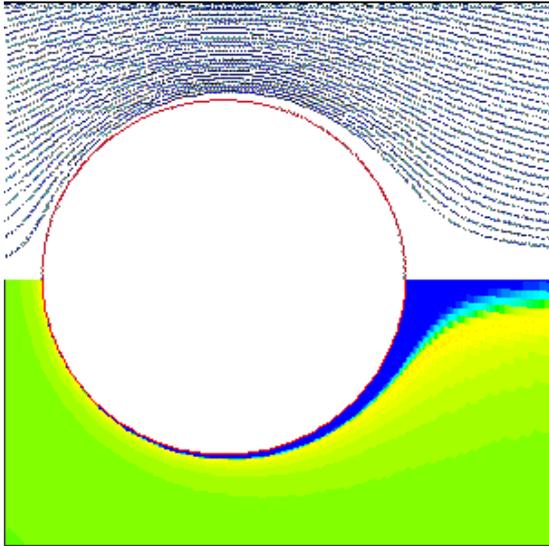


Fig. 6 Particle flow field in the case of potential main flow around a circular cylinder ($\tau = 0.01$).

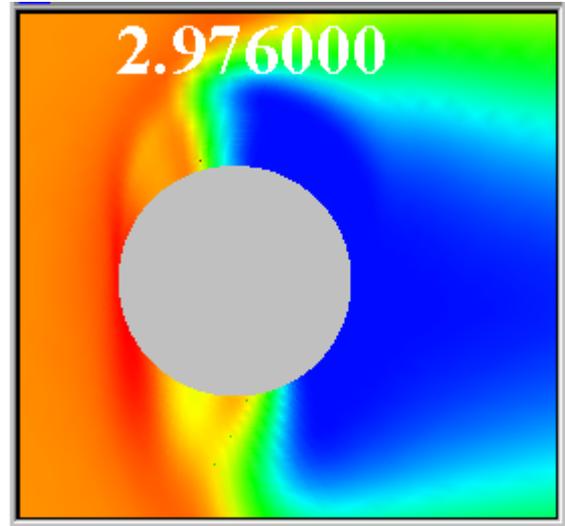
次に、振動円柱を模した主流による計算例を示す。この例では、一様流中を任意に運動する円柱まわりのポテンシャル流れを考え、さらに円柱に循環をもたせている。このようなポテンシャルを考えることで、任意運動によって heaving 運動を、循環によって pitching 運動を擬似的に表すことができる⁽⁹⁾。円柱まわりの粒子密度を Fig. 7 に示す。色の意味は Fig. 6 と同様である。

一様流中を heaving 運動する円柱まわりの粒子分布を同図 (a) に示す。計算条件は Stokes 数 $\tau = 0.5$ 、振動周波数 $k_h = 10.0$ である。また、振動振幅は円柱半径に等しい。この Stokes 数は静止円柱の場合の閾値よりも大きいため、円柱表面の上流側では粒子衝突が起きている様子がわかる。一方、下流側では上下方向に振動振幅程度の幅で低密度域が形成されている。これは、粒子の緩和時間より振動周期が短いため、粒子が主流に十分追従できないことによる。

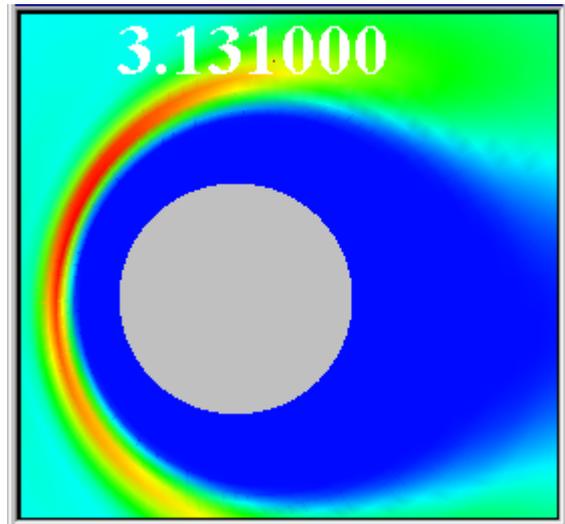
円柱がその中心まわりに pitching 運動する場合の粒子密度を Fig. 7 (b) に示す。この場合の計算条件は $\tau = 1/16$ 、 $k_p = 10.0$ である。回転の振幅は約 10 deg. である。この条件下では、粒子の緩和時間と振動周期は同程度であるが、振動の影響で円柱まわりに粒子密度の低い領域が形成されている。また、ここでの Stokes 数は静止円柱の閾値に等しいので、円柱前方に形成された低密度領域の上流側端で高い粒子密度が発生していることもわかる。

最後に方程式系(1)-(4)を連立して解いた例を Fig. 8 に示す。この場合の計算条件は Reynolds 数 10^4 、 $\tau = 0.02$ 、 $\gamma = 0$ である。主流の渦度と等圧力線を同図(a)に示した。また、粒子密

度を同図(b)に示す。この例では Stokes 数は閾値以下であるから上流側では円柱表面への粒子衝突は生じていないが、前方淀み点をはじめ円柱表面の数ヶ所に高密度領域が形成されているのがわかる。特に、下流側円柱表面では主流の剥離に伴う逆流域で高密度領域が形成されている。これらの領域では粘性効果が大きな影響をもつことは明らかであるが、定性的には今回得られた淀み点近傍での性質によって理解できる結果である。



(a) Heaving oscillation ($\tau = 0.5$, $k_h = 10.0$)



(b) Pitching oscillation ($\tau = 1/16$, $k_p = 10.0$)

Fig. 7 Particle flow field around an oscillating circular cylinder.

5. 結論

非圧縮性流れを主流とする 2 流体方程式を用いて 2 次元物体まわりの流れ場について調べた。有限な Stokes 数における方程式の性質を明らかにするために物体の淀み点近傍に着目した。主流として淀み点付近でのポテンシャル流れを考え、この領域における粒子流の振舞いについて解析的に調べた。

その結果、Stokes 数が粒子衝突の閾値より小さい場合、主流と相似な速度場が存在することを示し、この範囲における

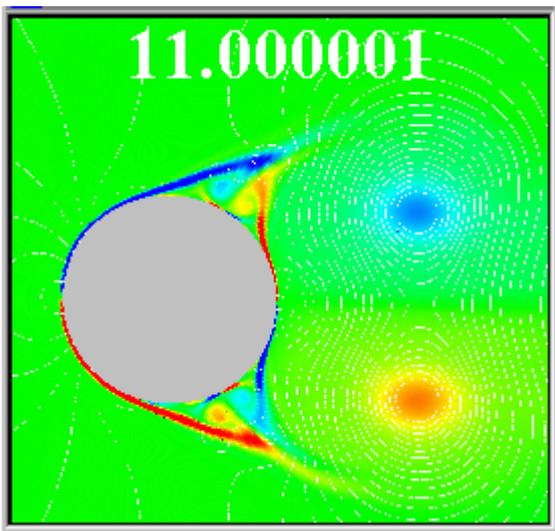
粒子密度を Stokes 数の関数として求めた。得られた解から、粒子密度は淀み点で特異性を示すが剥離点では零となることが示された。一方、粒子衝突の閾値より大きい Stokes 数に対しては Stokes 数の逆ベキによる級数解を求めた。

これらの解によれば、淀み点近傍における粒子密度は粒子衝突の閾値付近で急激に増加する。実際、円柱まわりのポテンシャル流れを主流とする数値解と比較した結果、両者の一致は十分であった。ただし、閾値以下の Stokes 数域における数値解では表面の密度分布を過小評価する可能性があり注意が必要となる。また、2 流体方程式を用いた円柱まわりの流れに関する計算結果をいくつか示し、それらの流れ場における性質と今回得られた結果との関連を確認した。

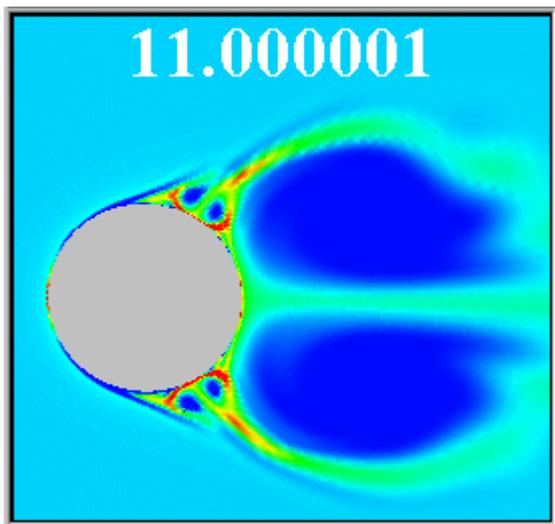
なお、本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究(C) (No. 12650059) による援助を受けた。

参考文献

- (1) Saffman, P., G.: On the stability of laminar flow of a dusty gas, *J. Fluid Mech.* **13** (1962) 120-128.
- (2) Marble, F., E.: Dynamics of dusty gases, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **2** (1970) 397-446.
- (3) Michael, D. H.: The steady motion of a sphere in a dusty gas, *J. Fluid Mech.* **31** (1968) 175-192.
- (4) Healy, J. V.: Perturbed two-phase cylindrical type flows, *Phys. of Fluids* **13** (1970) 551-557.
- (5) Sone, Y.: Flow of dusty gas past a body, *J. Phys. Soc. Japan* **33** (1972) 242-245.
- (6) 日本流体力学会編, 混相流体の力学 (1991), pp. 140-144.
- (7) Healy, J. V.: Two-phase concave-type flows, *J. Fluid Mech.* **46** (1971) 33-42.
- (8) Tsuboi, K.: Computational and analytical study on particle flow field around a circular cylinder, *AIAA paper* 2001-2650 (2001).
- (9) Tsuboi, K. and Kimura, S.: Computational study on local impingement efficiency of an oscillating circular cylinder, *AIAA paper* 2000-2661 (2000).



(a) Vorticity and pressure distribution of main flow.



(b) Particle density distribution.

Fig. 8 Flow field around a circular cylinder ($Re=10^4$, $\tau=0.02$, $\gamma=0.0$)