

# 硝子電気溶融炉の有限要素法数値解析～電圧入力条件におけるスキーム評価

FEM Simulation of Electric Glass Furnaces – Scheme Analyses of Voltage Input Conditions

伊藤 肇, 旭硝子(株)中央研究所, 横浜市神奈川区羽沢町 1150, E-mail: h-itoh@agc.co.jp  
 Hajime Itoh, Asahi Glass Co. Ltd., 1150 Hazawa-cho, Kanagawa-ku, Yokohama

<Abstract> Simulation of electric glass furnaces is performed using Finite Element Method. The governing equations consist of three parts: momentum equation, energy equation, and electric field equation. Because glass melt has high Prandtl numbers, equations are approximated by using infinite Prandtl number fluid. A finite element scheme is presented, where boundary conditions for the electric field is given by voltage input, i.e., inhomogeneous Dirichlet condition. Error estimates of the finite element solution are established.

## 1. はじめに

ガラスの製造工程は通常、珪砂などの原料を約1500℃まで加熱して溶融ガラスを生成した後、冷却・成形を行う。溶融ガラスの生成はガラス溶融炉と呼ばれる耐火物で構成された炉内で行われるが、加熱を行う上で多量のエネルギーを消費した上に多量のCO<sub>2</sub>を排出する。そのためガラス溶融炉の中で品質と両立しつつCO<sub>2</sub>排出量を削減していくのが今後のガラス製造業のかかえる主要課題のひとつである。

ガラス溶融炉は重油や天然ガスなどの燃料を燃焼する方式が一般的であるが、溶融ガラスの中に電極を設置し直接通電する方式も存在し、熱効率の面からCO<sub>2</sub>排出量の少ない溶融炉といえる。そのためこの直接通電方式によるガラス溶融炉の最適設計・操作技術の確立に必要な数値シミュレーション技術の構築は、環境調和型製造プロセスを実現する上での鍵となる。

筆者らは、有限要素法による無限プラントル数流体熱対流のシミュレーションスキーム[1]を拡張し、温度場・流れ場・静電場の連成モデルにおける有限要素法スキームを挙げ、そのスキーム評価を理論面および数値解析実験によって行った[2]。本報告ではさらにより実現現象に近いスキーム評価を行うため、温度・電場についての境界条件を変更・一般化し、電場については非斉次境界条件(電圧入力条件)とした場合におけるスキーム評価を行った。

## 2. 支配方程式

$\Omega$  を  $d(=2or3)$  次元の有界領域とし、その境界を  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 (\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset, \Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$  とする。 $T$  を時刻を表す正定数とする。 $\Omega \times (0, T)$  で定義された流速  $u: (0, T) \rightarrow V$ , 圧力  $p: (0, T) \rightarrow Q$ , 温度  $\theta: (0, T) \rightarrow \mathcal{P}$ , 電位  $\pi: (0, T) \rightarrow \Lambda(\pi_b)$ , 但し  $V = \{v \in (H^1(\Omega))^d; v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ ,

$$Q = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(x) dx = 0\}, \quad \mathcal{P} = \{\psi \in H^1(\Omega); \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_0$$

$$\cup \Gamma_1, \psi = 0 \text{ on } \Gamma_2\}, \quad \Lambda(\lambda_b) = \{\lambda \in H^1(\Omega); \lambda = \lambda_b \text{ on } \Gamma_0, \frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

( $n$ : 境界面外向き法線ベクトル) を考える。ガラス電気溶融炉の支配方程式は、次に挙げる問題で記述される。

$$-2\nabla \otimes D(u(t)) + \nabla p(t) = E\theta(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t) + \text{Rau}(t) \cdot \nabla \theta(t) = \Delta \theta(t) + \nabla \pi(t) \cdot \nabla \pi(t), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\Delta \pi(t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

初期条件  $\theta(0) = \theta^0 \in \mathcal{P}$ , 境界条件  $\pi_b: (0, T) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0)$ . 但し

$$[\nabla \otimes D(v)]_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(v), \quad D_{ij}(v) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad E = (0, 1)$$

または  $(0, 0, 1)$ ,  $Ra$  はレーリー数とする。(4)式は単独で解が得られるが、溶融ガラスは比抵抗に温度依存性を持つため今後の研究進展の準備として連立形式で表現している。(1)~(4)を弱形式で表現すると次のようになる。

$$a(u(t), v) + b(v, p(t)) = (E\theta(t), v), \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$b(u(t), q) = 0, \quad \forall q \in Q, \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial t}(t), \psi \right) + \text{Rac}_1(u(t), \theta(t), \psi) + c_0(\theta(t), \psi) = c_2(\pi(t), \pi(t), \psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{P}, \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$c_0(\pi(t), \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \equiv \Lambda(0), \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

$$\text{但し } a(v, w) \equiv 2 \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} D_{ij}(v) D_{ij}(w) dx, \quad b(v, q) \equiv - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} q dx,$$

$$c_0(\psi, \varphi) \equiv \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad c_1(v, \psi, \varphi)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} v_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi \right) dx, \quad c_2(\lambda, \zeta, \psi) \equiv \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \psi dx.$$

## 3. 有限要素法スキーム

前章で示したガラス電気溶融炉の支配方程式を数値的に解くための有限要素法スキームを考える。 $\mathfrak{S}_h$  を  $\overline{\Omega}$  の正則な領域分割とし、 $h$  を要素  $K \in \mathfrak{S}_h$  の最大要素径とする。有限要素部分空間を次のように定義する。

$$V_h \equiv \{v_h \in V; v_h|_K \in P_{k(u)}, K \in \mathfrak{S}_h\}, \quad Q_h \equiv \{q_h \in Q; q_h|_K \in P_{k(p)},$$

$$K \in \mathfrak{S}_h\}, \quad \mathcal{P}_h \equiv \{\psi_h \in \mathcal{P}; \psi_h|_K \in P_{k(\theta)}, K \in \mathfrak{S}_h\}, \quad \Lambda_h(\lambda_b) \equiv \{\lambda_h \in$$

$$\Lambda(\lambda_b); \lambda_h|_K \in P_{k(\pi)}, K \in \mathfrak{S}_h\}, \text{ 但し } P_k \text{ は } k \text{ 次以下の多項式の全体, } k(u), k(p), k(\theta), k(\pi) \text{ は非負整数とする. } \tau > 0 \text{ を時間ステップとし, 時間方向の離散解は } t = n\tau, n = 0, \dots, N_T \equiv \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil \text{ で定義する. (5)~(8) に対応する有限要素スキームは次のようになる.}$$

次の有限要素方程式を満たす解  $\{u_h^n, p_h^n, \theta_h^n, \pi_h^n\}_{n=0}^{N_T} \in V_h \times Q_h \times \mathcal{P}_h \times \Lambda_h(\pi_b)$  を求めること。

$$a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (E\theta_h^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad n = 0, \dots, N_T, \quad (9)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad n = 0, \dots, N_T, \quad (10)$$

$$(D_\tau \theta_h^{n-1}, \psi_h) + \text{Rac}_1(u_h^{n-1}, \theta_h^n, \psi_h) + c_0(\theta_h^n, \psi_h) = c_2(\pi_h^n, \pi_h^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in \mathcal{P}_h, \quad n = 1, \dots, N_T, \quad (11)$$

$$c_0(\pi_h^n, \lambda_h) = 0, \quad \forall \lambda_h \in \Lambda_h \equiv \Lambda_h(0), \quad n = 0, \dots, N_T. \quad (12)$$

ここで  $D_\tau \psi_h^k \equiv \frac{\psi_h^{k+1} - \psi_h^k}{\tau}$ ,  $\pi_{bh}^n \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$  は  $\pi_b(n\tau)$  の補間値, 初期条件  $\theta_h^0 \in \mathcal{W}_h$  は  $\theta^0$  の補間値とする.

**Theorem** 連続問題(1)~(4)の解について,

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T]; (H^{k(u)+1}(\Omega))^d \cap V) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))^d) \\ p &\in C([0, T]; H^{k(p)+1}(\Omega) \cap Q) \\ \theta &\in C([0, T]; H^{k(\theta)+1}(\Omega) \cap \mathcal{W}) \cap H^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \pi &\in C([0, T]; H^{k(\pi)+1}(\Omega) \cap \Lambda(\pi_b) \cap W^{1,4}(\Omega)) \end{aligned}$$

が成り立ち, (12)の解について  $\|\pi_h^n\|_{1,4,\Omega} \leq M(n=0, \dots, N_T)$  なる  $h, \tau$  に依存しない正定数  $M$  が存在するとする. また,

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \|q_h\|_Q} \geq \beta > 0$$

そのとき,

$$\|u - u_h\|_{L^\infty((H^1)^d)} \cdot \|p - p_h\|_{L^\infty(L^2)} \cdot \|\theta - \theta_h\|_{L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)} \leq C(h^k + \tau),$$

$$\|\pi - \pi_h\|_{L^\infty(H^1)} \leq C'h^{k(\pi)}$$

$k = \min\{k(u), k(p)+1, k(\theta), k(\pi)\}$  なる  $C, C' > 0$  が存在する.

但し  $P_h: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_h$  は Poisson 射影,  $\|v\|_{C([0, T]; X)}$

$$\equiv \max\{\|v(t)\|_X; t \in [0, T]\}, \quad \|v\|_{L^2(0, T; X)} \equiv \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{H^k(0, T; X)} \equiv \left( \sum_{j=0}^k \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|v_h\|_{L^\infty(X)} \equiv \max\{$$

$$\|v_h^n\|_X; n=0, \dots, N_T\}, \quad \|v_h\|_{L^2(X)} \equiv \left( \tau \sum_{n=1}^{N_T} \|v_h^n\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

#### 4. 数値計算例

上記スキームにもとづいて, 電気溶融炉を簡易化したモデルを想定し, 数値計算を行った. 計算領域およびメッシュ分割を Fig.1 に示す. 使用した有限要素は, 流れ/圧力/温度/電場 = P2/P1/P1/P1 とし, Fig.1 にあげた通り,  $(x, y) = ((-1, 1), (-1, 1))$  の2次元領域内で, 要素数 800, 節点数 1681 と分割した.

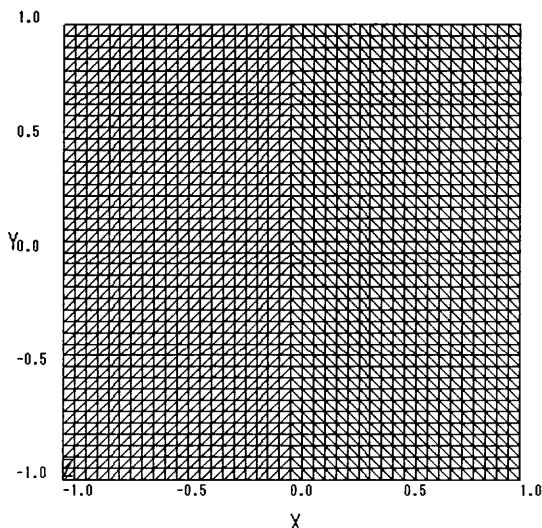


Fig.1 解析領域とメッシュ分割

流れ場, 温度場, 電場それぞれに対する境界条件は次の通りである.

流れ場: すべての境界で流速 0 (non-slip)

温度場: 上面 ( $y=1$ ) で固定境界 ( $\theta=0$ ), その他は断熱境界

電場: 以下の4ケースについて計算を行った.

ケース 1:  $y=-1, -0.3 \leq x \leq -0.2$  の範囲で  $\pi = -0.6264$ ,  $y=-1, 0.2 \leq x \leq 0.3$  の範囲で  $\pi = 0.6264$  の固定境界. その他は絶縁境界(ジュール発熱の総和が 1).

ケース 2:  $y=-1, -0.5 \leq x \leq -0.4$  の範囲で  $\pi = -0.7151$ ,  $y=-1, 0.4 \leq x \leq 0.5$  の範囲で  $\pi = 0.7151$  の固定境界. その他は絶縁境界(ジュール発熱の総和が 1).

ケース 3:  $y=-1, -0.7 \leq x \leq -0.6$  の範囲で  $\pi = -0.7847$ ,  $y=-1, 0.6 \leq x \leq 0.7$  の範囲で  $\pi = 0.7847$  の固定境界. その他は絶縁境界(ジュール発熱の総和が 1).

ケース 4:  $y=-1, -0.9 \leq x \leq -0.8$  の範囲で  $\pi = -0.8755$ ,  $y=-1, 0.8 \leq x \leq 0.9$  の範囲で  $\pi = 0.8755$  の固定境界. その他は絶縁境界(ジュール発熱の総和が 1).

上記の境界条件は実際の電気溶融炉の条件である. 炉の上表面に硝子原料があり, 炉底に電極が存在, さらに周囲を断熱炉材で囲まれている状況を簡易化したものとなっている.

初期条件は, 全域において  $\theta=0$  とし, 時間ステップ  $\tau=1$ , レーリー数  $Ra=100$  にて計算を行った.

時刻  $T=10$  における, 各ケースの流れ場, 温度場, 電場についての計算結果を, Fig.2~Fig.5 に示す. この結果から, 電極間距離を変化させることによって対流構造が大きく変わってくるのがわかる.

具体的には, ケース 1 のように電極間距離が小さい場合には中央部に高温部が生じその結果として中央で上昇し, 両側面で下降するような流れが発生する. それに対し, ケース 4 のように電極間距離が離れている場合には逆に両側面に高温部が発生しその結果として中央で下降し, 両側面で上昇するような流れが発生する. ケース 3 の場合にはその中間的状況となり, 熱対流が 4 ケースの中でもっとも小さくなる.

こうした対流構造の違いは実際の生産上では製品品質に大きな影響を及ぼす. その意味で, 炉の最適設計指針を得るためのツールとして数値シミュレーションの必要性・有効性がこのような簡易モデルを用いた検討から推論することが可能である.

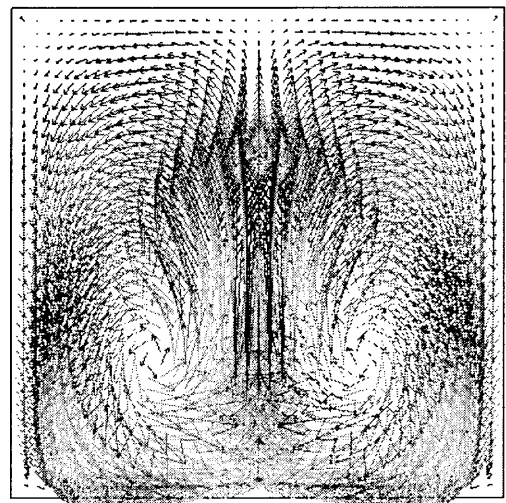


Fig.2(a) 解析結果~ケース1 流速ベクトル図

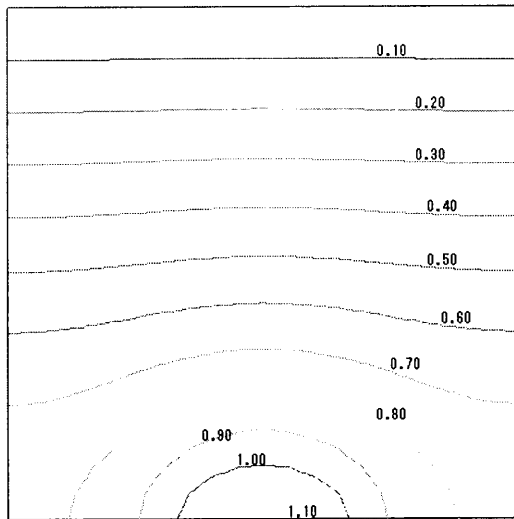


Fig.2(b) 解析結果～ケース1 温度コンタ図

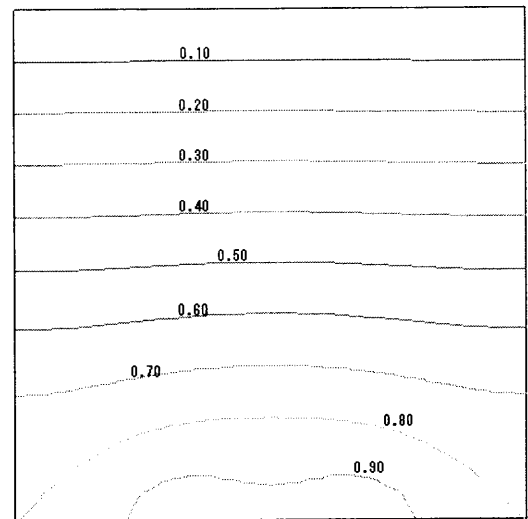


Fig.3(b) 解析結果～ケース2 温度コンタ図

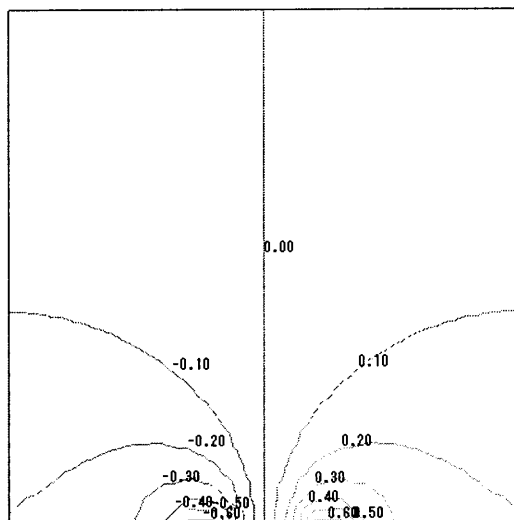


Fig.2(c) 解析結果～ケース1 電位コンタ図

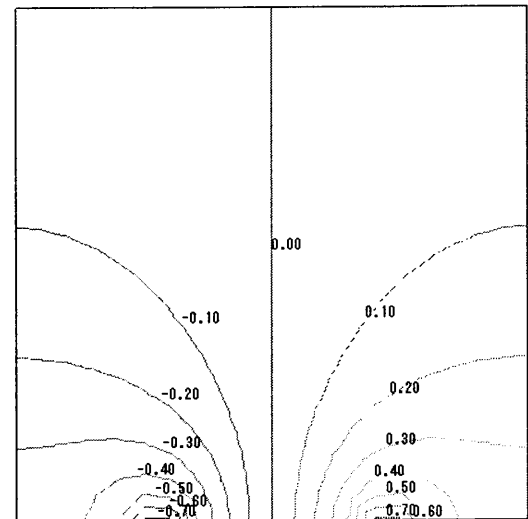


Fig.3(c) 解析結果～ケース2 電位コンタ図

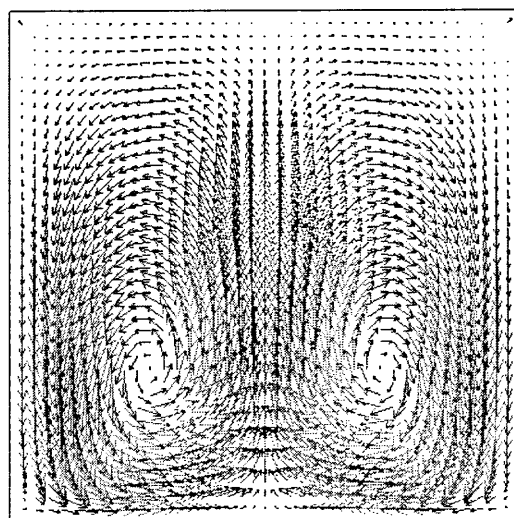


Fig.3(a) 解析結果～ケース2 流速ベクトル図

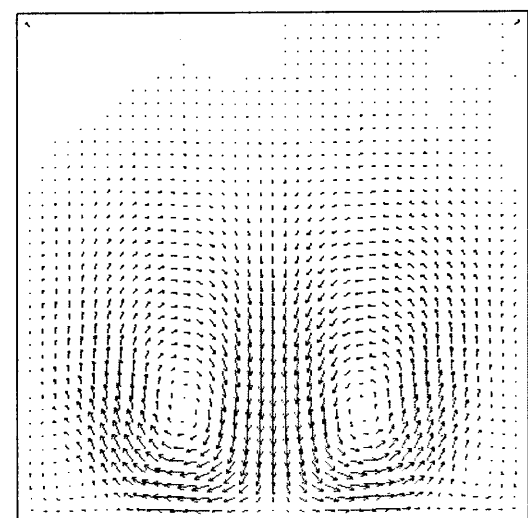


Fig.4(a) 解析結果～ケース3 流速ベクトル図

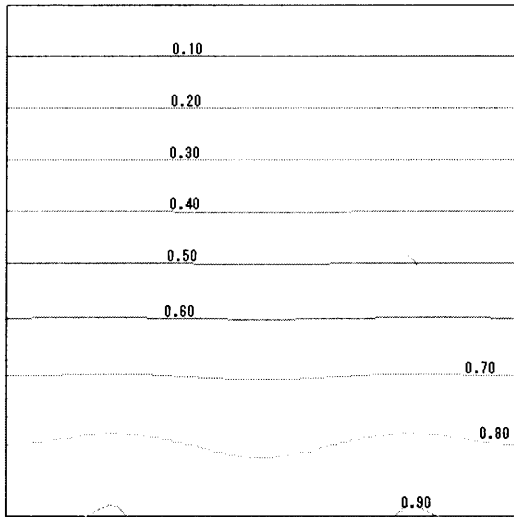


Fig.4(b) 解析結果～ケース3 温度コンタ図

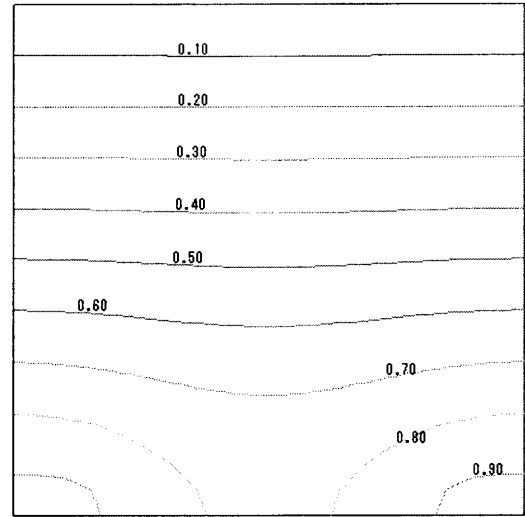


Fig.5(b) 解析結果～ケース4 温度コンタ図

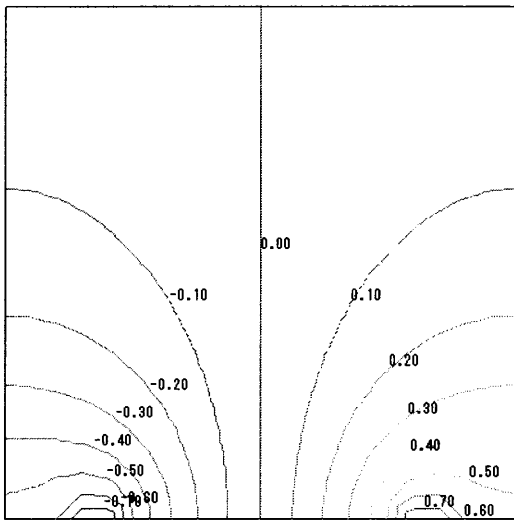


Fig.4(c) 解析結果～ケース2 電位コンタ図

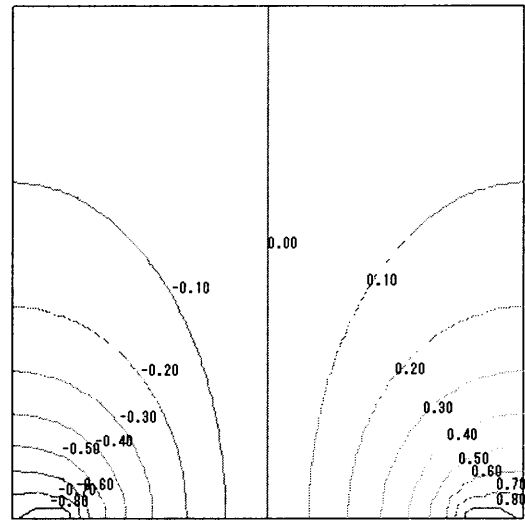


Fig.5(c) 解析結果～ケース4 電位コンタ図

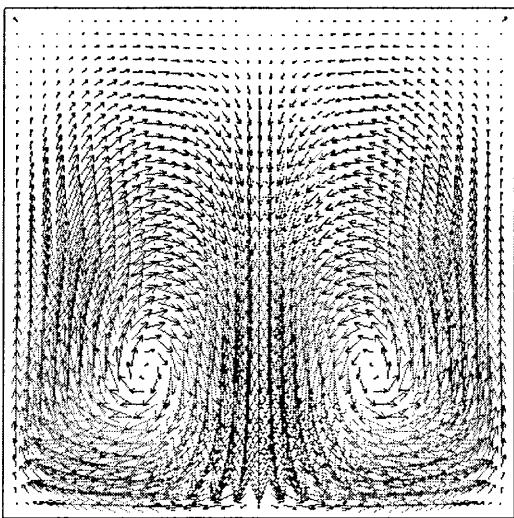


Fig.5(a) 解析結果～ケース4 流速ベクトル図

## 5. 謝辞

本研究の遂行にあたり、九州大学田端正久教授のご指導を賜りました。紙面をお借りしてお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] H. Itoh and M. Tabata. A finite element analysis for a thermal convection problem with the infinite Prandtl number. *Hiroshima Math. J.*, 28:555-570, 1998.
- [2] 伊藤 肇, "ガラス電気溶融炉の数値シミュレーション," 日本応用数理学会年会講演予稿集(2001), pp. 222-223.