有限スペクトル法
Finite Spectral Method

王健平, 四日市大学環境情報学部, 〒512-8512 三重県四日市市萱生町 1200,
北京大学力学与工程科学系，北京市海淀区 100871
E-mail: wangjp@yokkaichi-u.ac.j or wangjp@pku.edu.cn
Jian-Ping Wang, Department of Environmental and Information Sciences, Yokkaichi University, Kayo1200, Yokkaichi, Mie 512-8512, Japan
Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China

Finite spectral method based on Fourier integral is proposed. Since it is a fundamental concept, various numerical schemes can be constructed. The approaches to compressible and incompressible problems show the possibility of the new method for boundary conditions, discontinuities and complex geometries.

１．まえがき
スペクトル法の応用範囲を広げるために、局所化が必要不可欠である。境界条件の処理、不連続の対応及び複雑形状の計算等の問題点は皆全体的な性質から来ているからである[1]。著者は数年前に非周期性フーリエ変換に基づく有限スペクトル法[2]を提案したが、計算量の多さとスキームの複雑さの問題が残っている。最近発見したフーリエ積分による有限スペクトル法[3], [4]は、これらの問題の解決と共に、圧縮性、非圧縮性問題への広範な応用に道を開いた。

２．基底関数
フーリエ級数を用いて、原点では１、他の離散点では０のパルス関数を近似したとき、次の解が得られる。

$$W_N(x) = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} C_n \,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi n x}{l}} = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} C_n \cos\frac{\pi n x}{l} \qquad (1)$$

ここで Cn は台形積分公式の係数である。図１に $N = 5$ の時の $W_N(x)$ を示す。この関数は、両側に向かって減衰し、無限階微分可能で、両端での一階微分は０である。この曲線を一点の離散値がその両側に与える影響と見なすことができる。

３．有限スペクトル内挿
任意の離散関数が与えられたとき、関数の近似はその近傍の離散点の影響を加え合わせることによって得られる。$W_N(x)$を各点での基底関数として、次の内挿公式が得られる。

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=N_1}^{N_2} f(x_j) W_N(x - x_j) \qquad (2)$$

実際に、物理空間とスペクトル空間における連続無限なフーリエ積分の式を有限、離散形にすることによって、上の式を導くことができる。

図２に与えられた多項式についての内挿結果を示す。注意すべきは関数の非周期性である。これは各点の基底関数が互いに独立で、全体的な関数ではないからである。この性質は有限スペクトル法構築の必要条件、即ち等間隔格子と非周期性を同時に満たすものである。

４．有限スペクトル微分

$$f_x(x_i) = \sum_{j=N_1}^{N_2} f(x_j) W_N^{(1)}(x_j - x_i) \qquad (3)$$

上記の新しい近似法は各種の有限スペクトルスキームの構築を可能にした。式（２）より容易に離散点における一階微分の式が導ける。
ここで、$W_N^{(1)}(x)$は $W_N(x)$の一次微分である。同様に二階微分も計算できる。注目すべきは、フーリエ変換がもはや不必要であり、差分スキームと同形である。同じ点数を用いる場合、差分スキームと同じ計算量を費やすところに意義が大きい。

５．有限スペクトル ENO スキーム
従来のニュートン内挿の代わりに、このスキームは内挿と微分を有限スペクトル法で行った。図３は衝撃波と正弦波との干渉問題の計算結果である。図４は５次のスキームによるデトネーションの計算結果である。

６．有限スペクトル QUICK スキーム
QUICK スキームの微分項の計算に有限スペクトル法を導入し、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いて、円柱周りの流れをシミュレートした。図５はレーノルズ数 Re=1000 のときの計算結果である。壁面における境界条件はディリクレが点対照、ノイマンが軸対称で与えた。

７．有限スペクトル NND スキーム
NND スキームはFVS ショック・キャプチャリング法の一種で、２次精度スキームが衝撃波で１次になる。有限スペクトル法にこのスキームを導入して、計算した２次元円柱周りの超音速流れの結果が図６である。

８．結言
フーリエ積分に基づく有限スペクトル法は、本当の意味での点単位のスペクトル法である。その柔軟性、効率性は有限差分法、有限要素法に匹敵できる。圧縮性、非圧縮性流れへの適用の結果、境界条件の処理、不連続の解像度及び複雑形状問題の計算等、スペクトル法の固有問題を解決した。ここで提示したのはもっとも基本的な概念に基づくものなので、各種のスキームの開発、各種の問題への適用に大きな可能性を提供した。

謝辞　名古屋工業大学長谷川助教授、山形大学中西助教授、四日市大学武本教授、城之内教授、名古屋大學中村教授及び北京大学大学院生閆長江君、尹兆華君、呉徳全君、劉雲峰君、王雲君、邱全輝君、劉洪偉君に感謝の意を表する。この研究は中国自然科学基金、中国攀登プロジェクトの助成で行った。

参考文献
(1) J. P. Wang: Key to Problems in Spectral Methods, Computational Fluid Dynamics Review 1998, Eds. M. Hafez and K. Oshima, World Scientific, 369-378.
(2) J. P. Wang: Finite Spectral Method based on Non-periodic Fourier Transform, Computers & Fluids, Vol.27, Nos. 5-6, 1998, 639-644.
(3) J. P. Wang: Finite Spectral Method for Non-Periodic Problems, *Computational Fluid Dynamics 2000*, Ed. N. Satofuka, Springer, 2001, pp. 805-806.
(4) J. P. Wang: Finite Spectral Method for Compressible and Incompressible Flows, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol. 10, No. 4, 2002(in press).

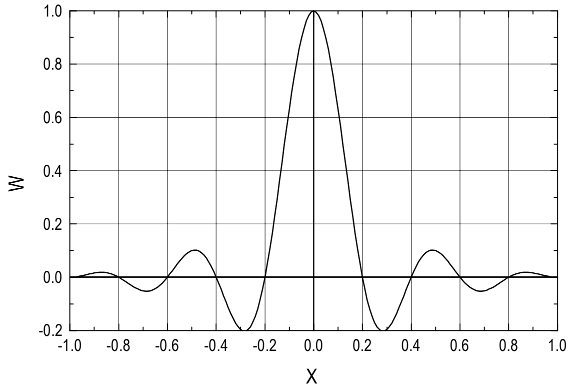

Fig. 1 Basis function of finite spectral interpolation when N=5.

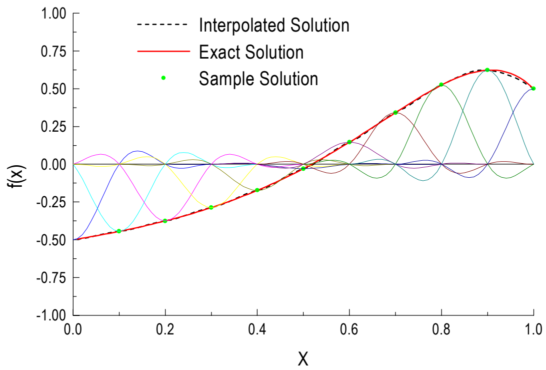

Fig. 2 Finite spectral interpolation of a given non-periodic polynomial.

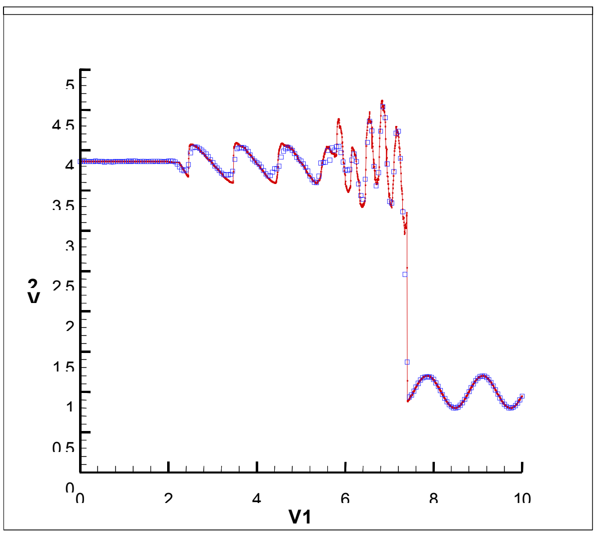

Fig. 3 Shock wave and sine wave interaction problem with finite spectral ENO scheme.

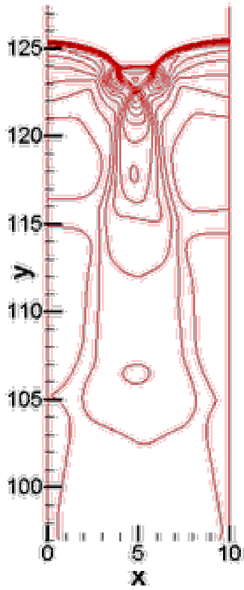

Fig. 4 Detonation wave problem with finite spectral ENO scheme.

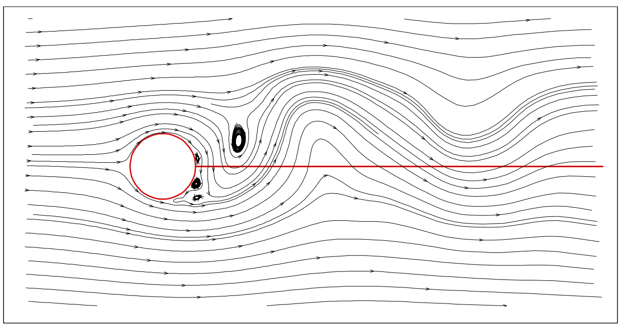

Fig. 5 Karman vortex street with finite spectral QUICK scheme at Re=1000.

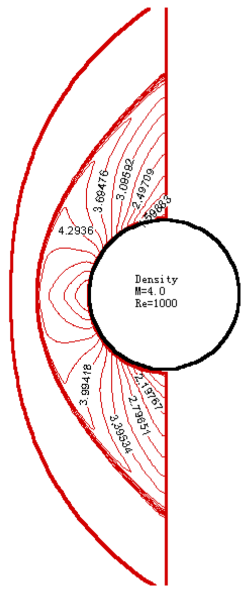

Fig. 6 Supersonic flow around a cylinder with finite spectral NND scheme at $M_\infty = 4$.