

大規模 DNS による乱流物理現象の解明

Study of the Physics of Turbulence by High Resolution DNS

金田 行雄, 石原 卓
名古屋大学大学院工学研究科
Yukio Kaneda, Takashi Ishihara
Nagoya University

E-mail: kaneda@cse.nagoya-u.ac.jp

1 はじめに

乱流の直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation; DNS) では、実験では得がたい精密なデータを実験誤差や不確定さを避けて得ることができる。たとえば、実験ではしばしば Taylor の凍結仮説 (二点の速度差を求めるため) や小さな渦の局所的等方性の仮説 (エネルギー散逸率を求めるため) など、それを用いることによる誤差の影響が必ずしも明らかではない仮説が用いられる [1] けれども、DNS ではそのような仮説を用いることなく、二点速度差やエネルギー散逸率の統計など、乱流場の基本データを得ることができる。

しかし一方、DNS にも明らかに一つの制限がある。それはコンピュータのメモリ、計算速度の有限性から来るものである。このため、DNS で扱える自由度、計算時間は必然的に制約を受ける。良く知られているように、十分発達した乱流では DNS で解像すべき自由度は Reynolds 数 Re の $9/4$ 乗に比例し、しかも (大きな渦の特性時間で規格化した) 最小の特性時間はおおよそ Re の $-3/4$ 乗に比例すると見積もられる。このことから、高い Re の乱流において、大きな渦の特性時間で測ったある程度の時間範囲の DNS を行うための計算量は最低 Re^3 に比例して増大すると見積もられる。すなわち、 Re が 10 倍の乱流の DNS を行うには最低 1000 倍の計算量が必要になる。このような制限のため、これまで DNS で実現できた Re は十分高いものではなく、たとえば乱流理論でよく知られた慣性小領域を十分実現したものとは言い難いものであった。(このことについては文献 [2] を参照されたい。)

このような状況下で、最近日本で世界最高速のスーパーコンピュータである「地球シミュレータ」(Earth Simulator; ES) の稼働が開始され、その ES によって従来のものとは桁違いに大規模の DNS が実行された。その DNS は縮まない流体に対する Navier-Stokes (NS) 方程式を、スペクトル法を用いて解くことによって行われた。縮まない流体中では音速が無限大であるため、圧力を通じて空間の各点は非局所的な相互作用を行う。また、スペクトル (フーリエ) 空間においてもその扱うべき相互作用は NS 方程式の非線形性のため、スペクトル空間全域に及び非局所的なものとなる。上記 DNS はこのように非局所的相互作用を行う、最大 4096^3 に及び格子点数を含む系を扱うものである。各格子点に速度 3 成分と圧力の計 4 自由度があると勘定すると、その系の総自由度は $4096^3 \times 4 =$ 約 2,500 億に及びことになる。このような、巨大な自由度を持ち、しかも非局所的かつ非線形の相互作用を行う系の DNS は乱流研究において世界最大規模のものである。また著者の知る限り物理に限らず科学の全分野を見渡して

も例のないものである。このような DNS のデータは、巨大自由度を持ち、非線形、不可逆、開放系の現象の典型としての乱流についての新しい知見を与えると期待される。ここでは、上記乱流 DNS とそのいくつかの結果について 簡単に紹介したい。より、詳しく本稿末尾に挙げるいくつかの文献を参照いただければ幸いである。

2 地球シミュレータ

地球シミュレータ(ES)はコンピュータ上に仮想「地球」を実現(シミュレート)し、それにより地球変動現象を解明することを目的として開発された。1997年から開発が行われ、2002年2月に完成、稼動を開始した。ESを構成する基本単位は16GBのメモリシステムを共有し、ピーク性能8Gflopsを持つ8個のベクトル型計算プロセッサからなる、独立動作可能な並列計算機(ノードと呼ばれる)である。ESはそのノードが結合したものであり、全部で640台のノードを持つ。それ故、総計算プロセッサ数 $640 \times 8 = 5120$ 個、総メモリ $640 \times 16\text{GB} = \text{約 } 10\text{TB}$ 、理論ピーク性能 $640 \times 8 \times 8\text{Gflops} = \text{約 } 40\text{Tflops}$ となる。このESによって、計算性能に関する世界的標準問題として知られるベンチマークテストLINPACKで実行性能35.86Tflopsが実現されている。また上記DNSでは、最大16.4Tflopsの実効性能が実現されている。(地球シミュレータのアーキテクチャ、および地球シミュレータにおける並列計算の手法の詳細については文献3を参照されたい。)

3 カノニカルな乱流のスペクトル法による DNS

3.1 カノニカルな乱流

NS方程式は、(a)流れによる非線形の移流効果の存在、(b)粘性による散逸性、(c)速度場が質量保存則を満たす(縮まない流れの場合には非圧縮のベクトル場である)という、流れの本質である3つの条件を満たす発展方程式として、これ以上簡単化しようのないものとみなすことができる。それ故、乱流のもつダイナミクスを最も簡単で基本的(カノニカルと呼ぶことにする)な場合について研究しようとするとき、このNS方程式に従う系を対象とするのは自然である。また、乱流のダイナミクスの本質(a),(b),(c)がNS方程式に既に含まれるとすれば、境界条件としてはできるだけ簡単なものを対象とすることも自然である。そのような境界条件としては周期境界条件が考えられる。現実に観察される乱流はもちろん厳密な意味でこの周期条件を満たすものはないが、Kolmogorovの理論をはじめ多くの乱流理論では、境界から十分離れた小さな渦は境界条件や外力の具体的詳細に依らない統計的普遍性があると考えられている。この考えによれば、その普遍則を探るにはできるだけ簡単な境界条件を用いてよいことが合理化される。このような考えから、乱流の研究においては、最も規範的で簡単な乱流(カノニカルな乱流)としてNS方程式、非圧縮条件と周期境界条件に従う乱流のDNSが多く行われてきた。上記ESによるDNSもこれらの条件に従うものである。

3.2 なぜスペクトル法か

周期境界条件下での流体のシミュレーションを行うのに、フーリエ分解あるいはスペクトル法を用いることを考えるのが自然である。しかし、スペクトル法では非線形項が(フーリ

工空間で)非局所的相互作用として表されることから、その評価のために膨大な計算量が必要となる。そのため、スペクトル法では一般に差分法より計算量が多くなるという欠点を持っている。しかし一方、スペクトル法では、空間微分演算がフーリエ空間で単に波数ベクトルとの掛け算として表現されるため、その演算を厳密かつ高速に計算できる利点を持っている。また、このことに関連してラプラス逆演算も代数演算として表現され、簡単に厳密に計算することができる。この意味で、スペクトル法はできる限り正確で規範的な計算結果を与え得るという意味を持っている。その計算結果は、スペクトル法以外の数値解法による計算結果の比較検証のための基準となるデータとして用いることもできる。

スペクトル法によって、ラプラス逆演算が厳密に計算できるということは、物理における最も基本的法則の一つである、質量保存則を満たすと計算という視点からも重要である。質量保存則を NS 方程式に適用すると圧力に対する Poisson 方程式を得る。すなわちその Poisson 方程式を満たさないということは、質量保存則を破ることに相当する。差分法では近似的にしかその式を解くことができず、実際 DNS の計算時間の大部分はこの逆演算に消費される。しかもその計算時間は計算誤差を小さくしようとすれば急速に増大する。これに対し、スペクトル法ではこのような問題は生じない。(なお、大規模な DNS では、解像すべき波数範囲が広くなり、それに伴い小さな渦の振幅レベルは大きな渦のそれに比べけた違いに小さくなる。このような小さな渦の運動を正しく求めるには、きわめて高い精度で Poisson 方程式を解くことが必要となる。)この意味で、スペクトル法は上に述べた「規範的」解法としての意味だけでなく、大規模な DNS において Poisson 方程式を高速に正しく解くことができる利点も持っている。なお、乱流 DNS におけるスペクトル法と差分法との比較に関する最近の研究としては、たとえば文献[5]を参照されたい。

4 DNS の結果

ES による格子点数 $N^3=4096^3$ の DNS は、たとえば 5 年前に世界最大であった 512^3 の DNS に比べ 512 倍の自由度を持っている。このような DNS は乱流理解のための貴重なデータを提供する。そのデータ解析は現在進行中である。ここでは、その解析によってこれまで得られたいくつかの結果について紹介する。

4.1 エネルギースペクトル

乱流理論の中で最も良く知られたものの一つはエネルギースペクトルについての Kolmogorov の $-5/3$ 乗則である。そのスペクトルを導く際に用いられた仮説の正当性はその後の研究で必ずしも正しくないことが明らかになってきたが、このスペクトル自体はこれまでの多くの実験でおおむね支持されている。図 1 は我々の DNS による(規格化された)エネルギースペクトルである(文献[6]から転載)。規格化によって k の $-5/3$ 乗(k は波数)で割ってあるので、もし $E(k)$ が k の $-5/3$ 乗に比例するのであれば図中ではそのスペクトルは平らに見えることになる。 $N=2048$ あるいは $N=4096$ の格子点数の DNS を行う以前は、それまでの $N=1024$ 以下の DNS 結果からの類推から、 N をさらに増やすことによって図中の平らな部分が広がっていくことが予想されていた。しかし実際の DNS では図 2 にあるようにその平らな部分が広がるのではなく、むしろその部分がすこし傾くことが観察された。この傾きの原因については現在まだ

良く分かっておらず間欠性による可能性も含め今後の検討課題である。このような傾きの検証は $N=1024$ 程度以下の規模の DNS では困難なものである。なお、従来の DNS おける慣性小領域の狭さ、非定常性などの問題点については文献[2]を参照されたい。

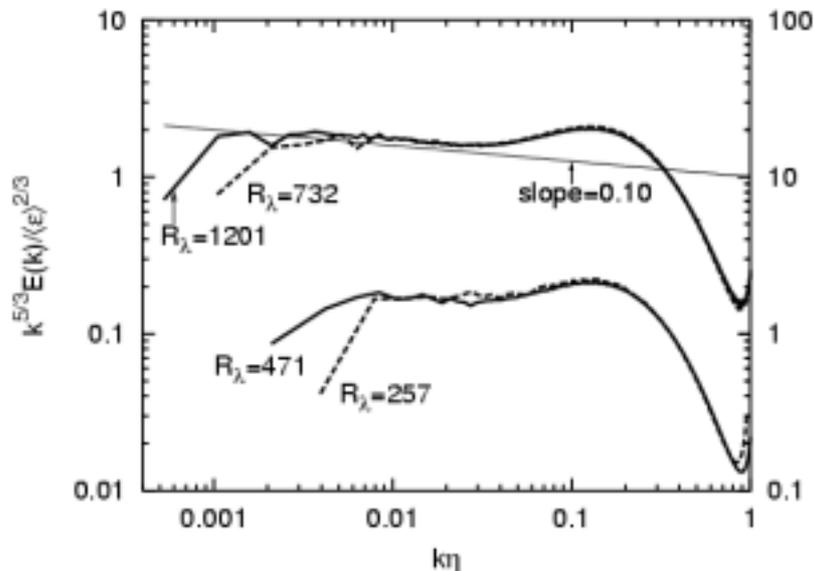


図 1 : さまざまな解像度 (A: $N=512, 1024$, B: $N=2048, 4096$) における規格化されたエネルギースペクトル。左右の目盛りはそれぞれ A, B に対応。(文献[6]から転載)

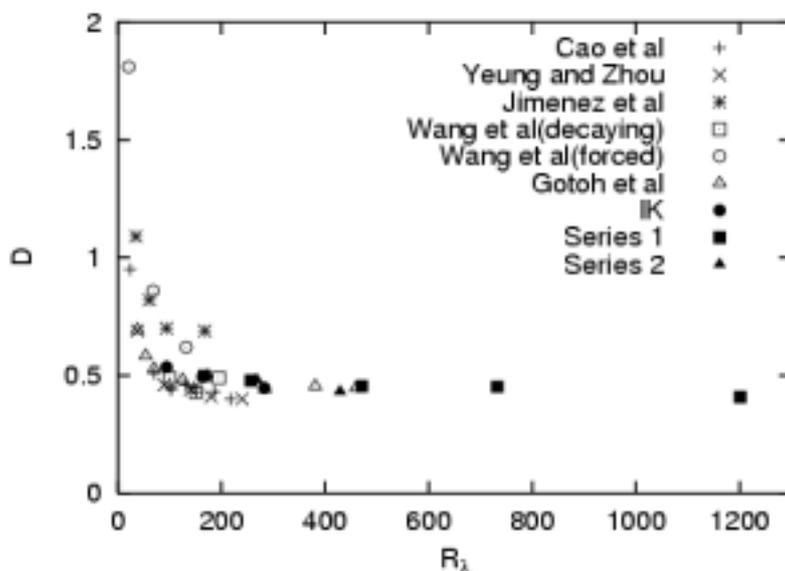


図 2 : 規格化されたエネルギー散逸率 $D = \langle \epsilon \rangle / u'^3$ の R 依存性。ここで $\langle \epsilon \rangle$, L , u' は各々、エネルギー散逸率の平均、大きな渦の特性的長さスケールと速度。(文献[6]から転載)

4.2 規格化されたエネルギー散逸率

Kolmogorov 理論に限らず多くの乱流理論においては、粘性率が無限小の極限、すなわち Reynolds 数が無限大の極限で、単位質量あたりのエネルギー散逸率の平均 $\langle \epsilon \rangle$ が有限の値をとるといふ仮定が重要な役割を果たしている。このことはもっともらしいけれど、直接的検

証は難しいとされてきた。図 3 はこれまでのさまざまな条件（外力）下の DNS における規格化された散逸率を示すものである（文献[6]から転載）。図 3 は Taylor のマイクロスケールレイノルズ数 R が 200 程度以下ではデータがばらついているけれども、 R が大きくなるにつれて、規格化された散逸率がある一定値に漸近していくことを示唆している。なお、上記エネルギースペクトル、規格化されたエネルギー散逸率についての議論のより詳細については文献[6]を参照されたい。また、エネルギー散逸率、渦度、圧力のスペクトルについては文献[7]を参照されたい。

4.3 乱流場の可視化

大規模乱流 DNS によるデータ量は膨大なものになる。そのような膨大なデータから直観的理解を得るには場の可視化が有効である。図 4 に可視化の例を示す。ここでは渦度場の等値面が示されている。図から小さなスケールにおける個々の渦の構造は乱流場の大きなスケールあるいは慣性小領域スケールの構造は違うことが分かる。たとえば、個々の木々やその枝や葉の構造は森の構造とは違うことに対応している。すなわち、「木を見て、森を見ず」にならないようにするには、個々の小さなスケールの渦構造と慣性小領域の構造とは違うことを認識する必要があることを示唆している。

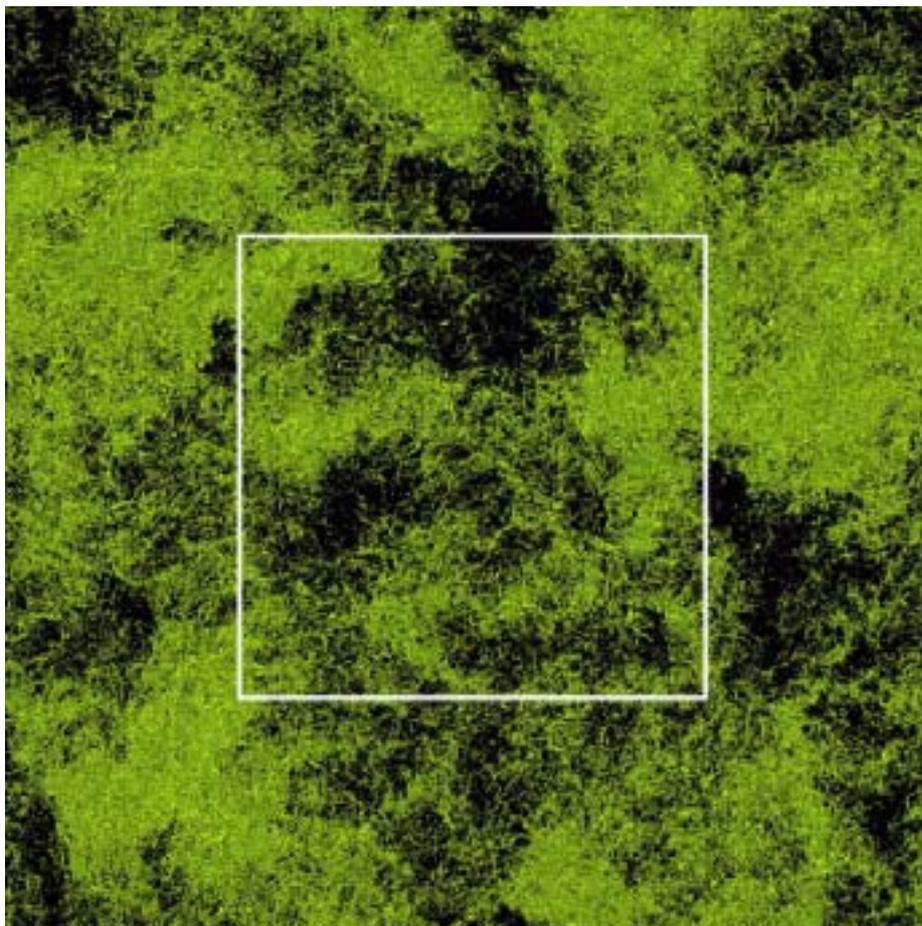


図 3 : $N=2048$ の DNS により得られた乱流場の強い渦度領域の可視化。（文献[3]から転載）

参考文献

- [1] Sreenivasan, K.R., “ Fluid Turbulence ” ,Review of Modern Physics,71,(1999), S383-S395
- [2] Ishihara, T. and Kaneda, Y., “ High resolution DNS of incompressible homogeneous forced turbulence --Time dependence of the statistics-- ” , in Proceedings of the International Workshop on Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, edited by Y. Kaneda and T. Gotoh, Springer,(2003),177-188
- [3] Yokokawa, M., Itakura, K., Uno, A., Ishihara, T. and Kaneda, Y., “ 16.4TFlops direct numerical simulation of turbulence by a Fourier spectral method on the Earth Simulator ” , Proc. of the IEEE/ACM SC2002 Conference (CD-ROM), November, 16-22, Baltimore,(2002)
- [4] 横川三津夫, “ 地球シミュレータによる世界最大規模乱流シミュレーション ” ,パリティ,17 卷 10 号,(2002),49-51
- [5] 芳松克則、石原卓、金田行雄、中井聡、西田秀利、里深信行; “ 3次元一様等方性乱流の直接数値シミュレーションにおけるスペクトル法と高次精度差分法との比較 ” , 日本機械学会論文集(B編)69 卷 679 号 (2003-3)541-546
- [6] Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M., Itakura, K. and Uno A., “ Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box ” , Physics of Fluids 15,(2003),L21-L24
- [7] Ishihara, T., Kaneda, Y., Yokokawa, M., Itakura, K., and Uno, A., “ Spectra of energy dissipation, enstrophy and Pressure by high-resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box ” , J. Phys. Soc. Jpn. 72,(2003),983-986