DNS データベースによる RANS モデルの構築

Construction of RANS Model using DNS Databases

長野　靖尚*,　服部　博文**
*名古屋工業大学大学院工学研究科　**名古屋工業大学工学部

Yasutaka Nagano and Hirofumi Hattori
Nagoya Institute of Technology

E-mail:hattori@heat.mech.nitech.ac.jp

1　はじめに

熱流体乱流現象をコンピュータを用いて予測・解析する方法は，現在幾つかある．なかでも，レイノルズ平均に基づく乱流モデル(Reynolds-Averaged Navier-Stokes equation model: RANS model)によるものは，商業用解析コードで広く使われていることからも分かるように，使いやすさと計算の低負荷・低コストが大きな特徴といえる．一方，乱流モデルを用いない直接数値シミュレーション（Direct Numerical Simulation: DNS）は，乱流モデルに比べてその適用範囲は限定されるものの，計算・解析精度の高さでは他を圧倒している．この事が，DNS が「数値実験」と称される所以でもある．コンピュータの高速処理技術，大容量メモリー化が進むにつれて，DNS の応用はますます増大するものと思われる．しかし，現実的な技術計算では，低負荷・低コストの数値解析手法という点で，乱流モデルによる解析は今後も最も一般的に行われるであろう．従って，これからの乱流の技術計算では，低負荷・低コストでかつ高精度な予測の可能な乱流モデルの開発が，重要な鍵を握っている．

さて，従来の乱流モデル開発及びその評価では，風洞実験などの装置実験が非常に大きな役割を担ってきた．装置実験では，比較的高いレイノルズ数の流れ，様々な外力(浮力，遠心力など)が三次元的に複雑に作用する流れ，複雑形状を有する流れなど工学的に重要な流れを扱うことができ，その結果は乱流モデル開発において今なお貴重である．しかし，近年の乱流モデル開発では，装置実験に加えて，DNS による数値実験が極めて重要な地位を占めつつある．DNS は，壁面極く近傍の乱流諸量に関する詳細な情報，圧力変動や乱れエネルギー散逸率を含む高次相関量など装置実験からは得ることの困難なデータを与えるため，普遍的な乱流モデル構築にますます必要不可欠な存在となってきている．更に，最近は，DNS データそのものをインターネット(WWW)上で入手することが可能となり[1]，DNS を用いた乱流モデリングは，盛んに行われるようになってきた[1-8].

---

[1] 東京大学熱流体研究室 DNS データベース(DNS Database of Turbulence and Heat Transfer):
http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/
ERCOFTAC Fluid Dynamics Databese WWW Services:
http://ercoftac.mech.surrey.ac.uk/

原稿受理　2003 年 5 月 19 日

乱流モデル開発における DNS の役割としては，次に示す二つが最も重要である．

・ 個々の素過程に対するモデリング（モデルの式表示やその物理的な意味付け）
・ 構築された乱流モデルの総合的評価

前者は，素過程モデル自身やそれに含まれるモデル定数およびモデル関数の妥当性を，DNS を用いて検証することである．特に，最近では乱流構造の解析結果を乱流のモデリングに反映するというこれ迄にない役割も担っている．一方，後者は，素過程モデルを組み合わせて構築された乱流モデル本体の予測性能を, 装置実験データの代わりに DNS データを用いて細部に亘って検証することを意味する．以下に，乱流モデル開発における DNS の持つ役割を，以上の二点から具体的に示す．

２　素過程のモデリングと DNS

従来の乱流のモデリングは，次の一連の手続きに基づいて行われてきた．

・ 乱れの生成, 輸送, 散逸に代表される個々の素過程を, 次元解析, 壁面漸近挙動解析, 局所等方・局所平衡の仮定など，物理的，数学的要求に基づいてモデル化する．
・ これら素過程モデルをモデル方程式に組み込んで，与えられた初期条件と境界条件の下で乱流モデル式を解く．
・ 得られた乱流諸量の解（予測値）を既存の実験データと比較・評価し，乱流モデルの妥当性を吟味する．

この様にして構築された初期の乱流モデルは，平均速度や平均温度などの予測においては，満足のいく結果を与えた．しかし，乱流制御や伝熱促進など熱流体乱流工学の応用が広がりつつある現在では，乱れエネルギーや温度乱れ強さ，あるいはそれらの散逸率など高次乱流諸量の信頼性の高い予測値を得ることの重要性が増大しつつあり，これら高次統計量の予測精度改善は急務となっている．この点，1990 年以前の乱流モデルは，不十分と言わざるを得ない．高次統計量まで高精度で予測できる乱流モデルを開発するためには，乱流諸量に関する信頼できる詳細な情報が必要不可欠であり，DNS はまさにこの要求を満たすものである．

素過程モデリングにおける DNS データの利用法としては, 次の方法が一般によく知られている．

・ DNS データ（真値）を素過程モデルに直接代入し，その結果（モデル予測値）と DNS から得られた素過程の挙動（真値）を比較し，モデルの妥当性を検証する方法.
・ 乱流モデルから得られた予測結果を素過程モデルに代入し，上記と同様に素過程モデルの妥当性を検証する方法.

前者は，アプリオリ(a priori)法とも呼ばれ，最近のモデリング手法の主流となりつつある．一方，後者は，初期の乱流モデリング以来最もよく用いられる乱流モデル評価法で，例えば乱れエネルギーの収支（解に基づく各素過程の値）を調べて乱流モデル自身の妥当性を検証するのがこれに相当する．この場合は，装置実験から得られた情報も十分に活用できるため，現在でも乱流のモデリングには欠かせない手法である．

DNS を用いたアプリオリ法の最大の利点は，複数の素過程間の関係（例えば厳密な散逸方程式に現れる生成項と消散項の関係あるいは熱流束方程式中で消散項に相当する温度・圧力

Table 1 Reynolds stress expressions of nonlinear models

Model	Type
Myong and Kasagi[10] (NLMK)	Quadratic model
Abe, Kondoh and Nagano[11] (NLAKN)	Quadratic model
Craft, Launder and Suga [12] (NLCLS)	Cubic model
Apsley and Leschziner [13] (NLAL)	Cubic model
Suga and Abe [14] (NLSA)	Cubic model

勾配相関項と散逸項の関係など）を考慮してモデル化が行えることである．このような素過程間の関係を調べて乱流モデルに反映させる方法は，最近特に注目を浴びている[1]．更に，アプリオリ法は，素過程モデリングで必要な特性時間スケールや長さスケールなどを決定するのにも極めて有効である．この方法による乱流モデリングを以下に示す．

2.1　DNS データベースによる非線形モデルの評価

レイノルズ応力を，対角成分を含めて予測できる代数応力モデルは，渦粘性モデルでは原理的に予測不可能な流れ場についても予測をすることができる．しかしながら，オリジナルの代数応力モデルはその表現が陰的であるため[9]，計算負荷が増加する．最近では，代数応力モデルにおいて，レイノルズ応力を速度こう配の 2 次積以上で表し，方程式を陽的にした非線形 $k-\varepsilon$ モデルが，予測性能と計算負荷の両面で比較的妥当であることから幾つか提案されている[7-8, 10-14]．この非線形 $k-\varepsilon$ モデルは，次式で与えられるように，レイノルズ応力が他の乱流諸量を用いて複合的にモデリングされているが，DNS データベースを用いて，その表現式をアプリオリ法により評価することは可能である．

$$
\begin{aligned}
\overline{u_i u_j} = {} & \frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2C_0\nu_t S_{ij} + C_1 k\tau^2\left(\Omega_{jk}S_{ki} + \Omega_{ik}S_{kj}\right) + C_2 k\tau^2\left(S_{ik}S_{kj} + \frac{1}{3}S_{mn}S_{mn}\delta_{ij}\right) \\
& + C_3 k\tau^2\left(\Omega_{ik}\Omega_{jk} + \frac{1}{3}\Omega_{mn}\Omega_{mn}\delta_{ij}\right) \\
& - \text{quadratic model} - \\
& + C_4 k\tau^3\left(S_{ki}\Omega_{\ell j} + S_{kj}\Omega_{\ell i}\right)S_{k\ell} + C_5 k\tau^3\left(\Omega_{i\ell}\Omega_{\ell m}S_{mj} + S_{i\ell}\Omega_{\ell m}\Omega_{mj} - \frac{2}{3}S_{\ell m}\Omega_{mn}\Omega_{n\ell}\delta_{ij}\right) \qquad (1) \\
& + C_6 k\tau^3 S_{ij}S_{k\ell}S_{k\ell} + C_7 k\tau^3 S_{ij}\Omega_{k\ell}\Omega_{k\ell} \\
& - \text{cubic model} - \\
& + A_{ij}
\end{aligned}
$$

ここで，$S_{ij} = \left(\partial\overline{U}_i/\partial x_j + \partial\overline{U}_j/\partial x_i\right)/2$ はひずみ速度テンソル，$\Omega_{ij} = \left(\partial\overline{U}_i/\partial x_j - \partial\overline{U}_j/\partial x_i\right)/2$ は渦度テンソル，k は乱流エネルギー，τ は特性時間スケール，A_{ij} は付加項，C_0 ～ C_7 はモデル定数である．

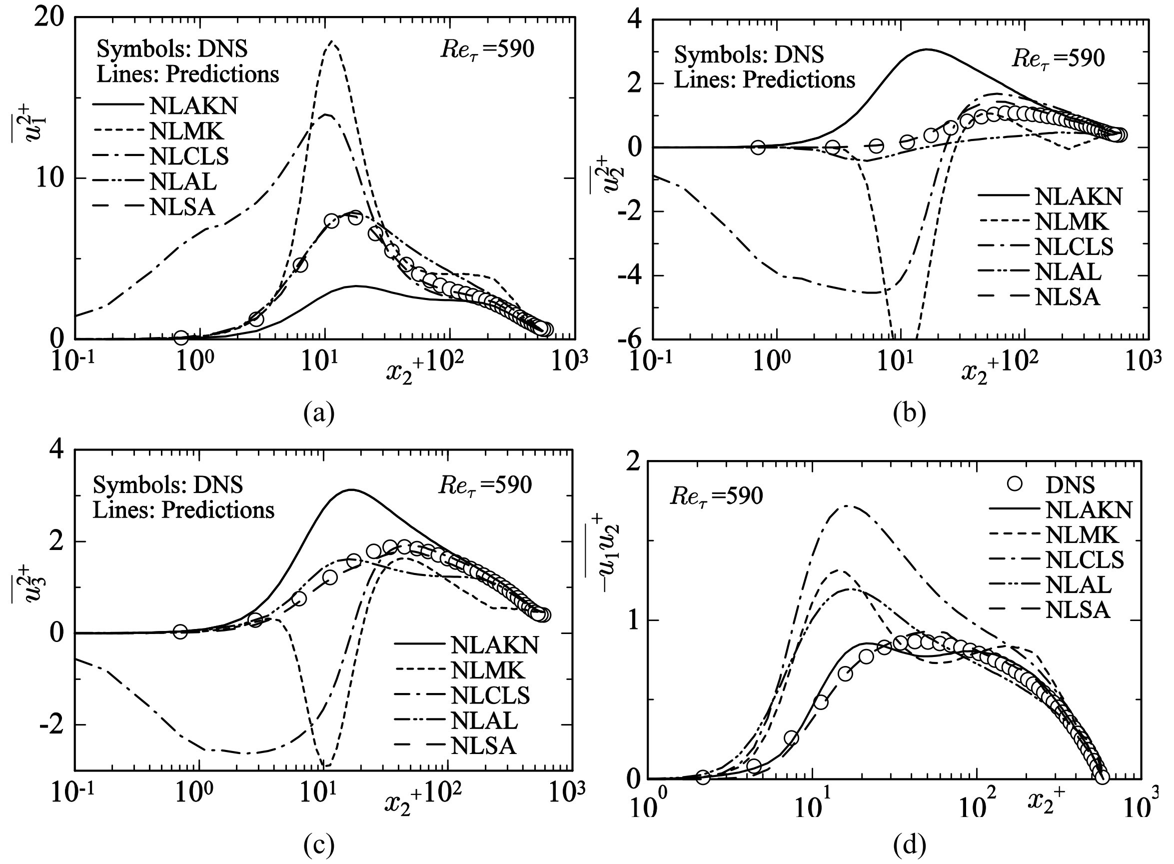


Fig. 1 *A priori* test for Reynolds stress expressions near wall in channel flow;
(a) $\overline{u_1^2}$ (b) $\overline{u_2^2}$, (c) $\overline{u_3^2}$, (d) $\overline{u_1 u_2}$

2 次元発達チャネル乱流において，表１に示す非線形モデルによるレイノルズ応力の表現式を，DNS データベース($\mathrm{Re}_\tau = 590$)[15]により評価する（モデル関数，モデル定数は文献参照）．ここで，NLMK モデル[10]，NLAKN モデル[11]は式(1)の右辺第 5 項までで表現される 2 次非線形モデルである．また．NLCLS モデル[12]，NLAL モデル[13]，NLSA モデル[14]は３次非線形モデルである．さらに，NLMK モデルと NLSA モデルには，乱れの壁面漸近挙動[16]を満たすための付加項 A_{ij} がモデル化されている．

図 1 に，$\overline{u_i u_j}$ の表示式の右辺に DNS データを代入した結果を示す．ここで，図中の座標軸は x_2 は壁面垂直方向である（同様に，x_1 は流れ方向，x_3 はスパン方向である）．NLAKN モデルは，図から明らかなように，対角成分についてはレイノルズ応力成分の分配が弱く，壁面漸近挙動が再現されていないことが分かる．これは，低レイノルズ数効果および壁面効果が適切に反映されていないためと，前節に記述したようにその表式中で壁面漸近挙動が保証されていないためである．NLMK モデル[10]，NLCLS モデル[12]においては，DNS データに

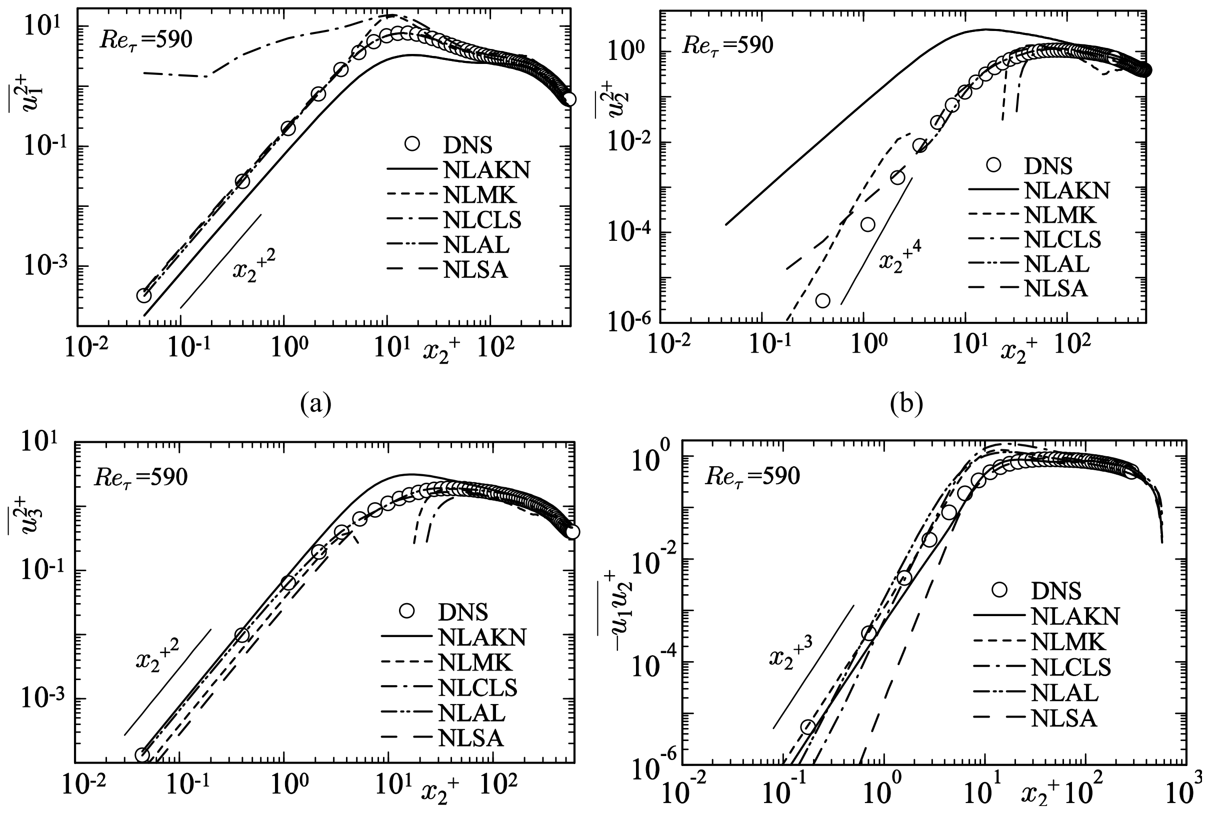


Fig. 2 *A priori* test for wall-limiting behavior of Reynolds stress expressions in channel flow;
(a) $\overline{u_1^2}$, (b) $\overline{u_2^2}$, (c) $\overline{u_3^2}$, (d) $\overline{u_1 u_2}$

よる検証でモデルの大きな欠点として顕在化したのが，実現性(Realizability)[17]の問題である．図に示したように，壁近傍においてこれらのモデルは$\overline{u_2^2}$と$\overline{u_3^2}$に負の値を与えることが分かる．また，NLAL モデル[13]においては，$\overline{u_2^2}$のみが負の値を取る結果を得た．これらは，モデル構成上の大きな問題点となる．レイノルズせん断応力$\overline{u_1 u_2}$については，NLSA モデルがほぼ DNS の挙動を再現する．また，2 次非線形モデルは，このような場においてはレイノルズせん断応力の表現式が線型モデルと同一になるが，NLAKN モデルは良好な結果を与えていることが分かる．

レイノルズ応力の対角成分まで漸近挙動を考慮したモデルは NLMK モデル[10]と NLSA モデル[14]である．NLMK モデルにおいては，付加項が $A_{ij} \cong -(2/3)k - O(x_2^4)$ となり，図 2 にお

いて漸近挙動の再現が確認される．しかしながら，この付加項が $x_2^+ \cong 1$ 付近で過大となり，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$ に対して負の値を与えるのは前述のとおりである．一方，NLSA モデルは，レイノルズ応力成分の分配においても定量的な一致が確認され，評価を行ったモデル中で一番優れたモデルである．漸近挙動については，自由界面におけるせん断ゼロにおいてのみ満たすようにモデル化されているため，壁面せん断乱流のように平均せん断がゼロで無い場合には $\overline{u_2^2} \propto x_2^4$ が保証されない[14]．その結果，図 2 に示すような $\overline{u_2^2} \propto x_2^2$ となる壁面漸近挙動を与える．また，図 2(d)に示したレイノルズせん断応力の壁面漸近挙動は，ほぼ全てのモデルがこれを満たすが，NLCLS モデルと NLSA モデルが若干満たさないように見える．この理由として，これらのモデルは表現式の中に疑似散逸 $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu\left(\partial\sqrt{k}/\partial y\right)^2$ を用いている．この疑似散逸率の厳密な壁面漸近値は x_2^2 に比例するが, 乱流エネルギー方程式のモデル化の結果として x_2^1 となることがある．これらのモデルは，このモデル化の特性を利用し，$\overline{u_1u_2} \propto x_2^3$ を満たすようモデル化されているため，DNS データベースが与える疑似散逸率を代入すると，$\overline{u_1u_2} \propto x_2^3$ が満足できない．以上の結果より，垂直方向レイノルズ応力成分（$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$）の分配と壁面漸近挙動を正確に表現できる非線形モデルは存在しないことが分かった．このように壁面極近くにおけるモデルの正確な予測性能を評価することが可能になったのは，DNS データベースの蓄積によるところが大きい．

ここで，DNS を用いた素過程モデリングにおけるアプリオリ法の利点をまとめると，以下の二点に集約される．

(1) モデル化した項の特性やモデルで必要な様々な条件を前もって把握できる．

(2) 既存の素過程モデルを評価することで，乱流モデリングにおける無用な手続きが排除できる．

第１の利点について少し補足を加えると，DNS から得られた乱れ場の情報は，対象とする場の力学的効果（例えば，圧力勾配の有無，浮力，旋回，二次流れ等）を正しく反映している．そのため，素過程モデルに上記の DNS データを代入することで，素過程モデルにおけるこれらの影響の度合いを前もって知ることができ，必要な特性スケールの決定をスムーズに行うことができる．一方，壁及び自由表面から十分離れた領域では，乱れの非一様性が弱くなり, 従来の一様性(もしくは擬一様性)を仮定した乱流モデルをそのまま用いることができる．そのため，必要なモデル化は壁及び自由表面近傍のみに限定でき，モデル定数やモデル関数の決定に要する手続きを大幅に簡略化できる．これが第２の利点である．

2.2　DNS データベースによる非線形モデルの再構築

上記の DNS データベースによる乱流モデルの評価結果を受け，垂直方向レイノルズ応力成分の分配と壁面漸近挙動を正確に表現できるモデルを再構築する．ベースモデルは，2 次非線形モデルである NLAKN モデル[11]とする．壁面の影響を入れるために NLMK モデル[10]や NLSA モデル[14]のように，右辺に補正項を付加する方法がある．NLMK モデルにおいては，この付加項は拡散の効果を取入れたものとなっている[10]．しかるに，応力方程式モデルを基に非線形モデルを導出する際には拡散の影響は無視され，また壁面近傍における乱れの再分配および非等方化はいわゆる圧力・ひずみ相関項の Rapid 項が担うことから，以下では式(1)における非線形項に壁面影響項を加えることにする．

$$\overline{u_i u_j} = (2/3)k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} + Q_o + Q_w \tag{2}$$

ここで，式(2)の右辺第３，４項は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} Q_o &= 4(C_D/f_R)k\tau_{Ro}^2\left(S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj} - S_{ik}S_{kj} + S_{mn}S_{mn}\delta_{ij}/3\right) \\ Q_w &= 4(C_D/f_R)k\tau_{Rw}^2\left(S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj} - S_{ik}S_{kj} + S_{mn}S_{mn}\delta_{ij}/3\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

τ_{R0} は基本モデル(NLAKN モデル)と同じ時間スケール($\tau_{R0} = \nu_t/k$)とし，新たに付加した時間スケール τ_{Rw} は壁面の影響を考慮し，壁面近くにおける乱れの非等方性を再現させるスケールとする．

壁面垂直方向応力 $\overline{u_2^2}$ は，壁面漸近展開式とモデル構成式から，次式が成立しなければならない．

$$a_v x_2^4 + \cdots = (2/3)\beta_v x_2^2 - (4C_D/f_R)\beta_v x_2^2 \tau_{Rw}^2 \gamma_v \cdots \tag{4}$$

ここで a_v， β_v， γ_v は乱流諸量を壁面近傍でテイラー展開した時に現れる係数である．

式(2)と式(4)より τ_{Rw} は次式を満足しなければならない．

$$\tau_{Rw} = \sqrt{\frac{f_R}{4C_D}\left(\frac{2}{3} - \frac{a_v}{\beta_v}x_2^2\right)\frac{1}{\gamma_v}} \tag{5}$$

ここで， a_v， β_v， γ_v については次式のようにモデル化する． a_v については， x_2^2 と共にモデル化し，

$$\alpha_v x_2^2 = C_v \frac{k}{4\left(\nu^{3/2}/\varepsilon^{1/2}\right)} \tag{6}$$

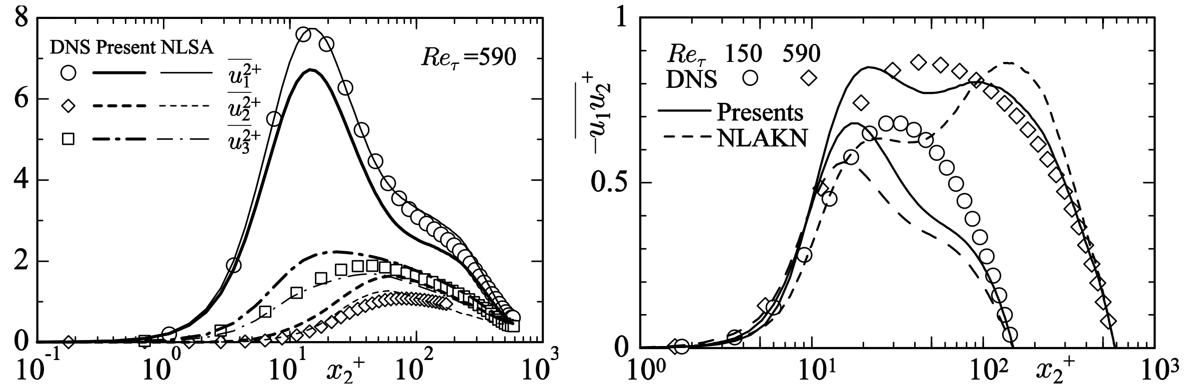
とモデル化される．また， β_v， γ_v は次式のようにモデル化される．

$$\beta_v = \frac{\varepsilon}{2\nu} \tag{7}$$

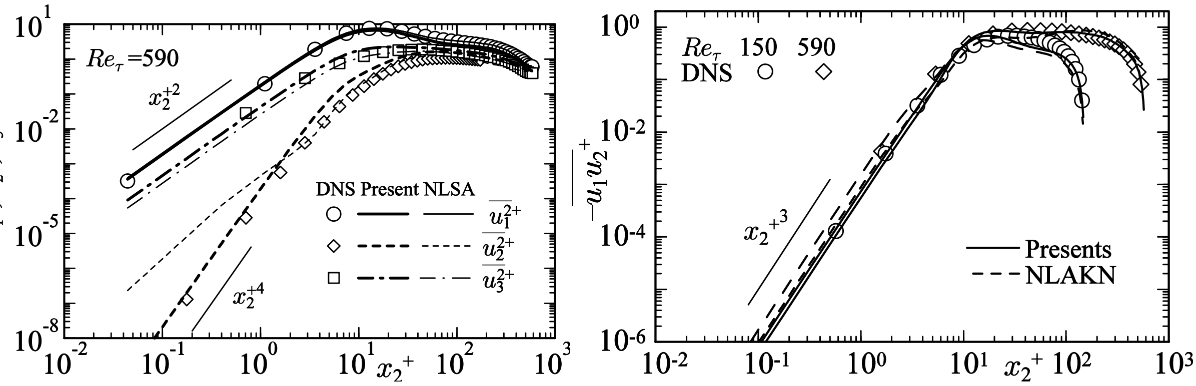
$$\gamma_v = f_{SW} = \frac{\Omega^2}{2} + \frac{S^2}{2} \tag{8}$$

ここで， $S^2 = S_{ij}S_{ij}$， $\Omega^2 = \Omega_{ij}\Omega_{ij}$ である．

よって， τ_{Rw} は次式のようにモデル化される．



(a)



(b)

Fig. 3 *A priori* test for present model; (a) Reynolds shear stresses, (b) wall-limiting behavior

$$\tau_{Rw} = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{f_R/C_D}{f_{SW}}\left(1-\frac{3C_v\sqrt{R_t}}{8}\right)} \tag{9}$$

ここで，$R_t = k^2/(\nu\varepsilon)$は乱流レイノルズ数である．最後に，上式において$R_t \to \infty$で右辺の括弧内が負の値を取るのを避けるため，以下のようにモデル化する．

$$\tau_{Rw} = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{f_R/C_D}{f_{SW}}\left(1-\frac{3C_{v1}f_{v2}}{8}\right)f_{v1}^2} \tag{10}$$

ここで，モデル関数を $f_{v1} = \exp\left[-\left(y^*/40\right)^2\right]$，$f_{v2} = 1-\exp\left(-\sqrt{R_t}/C_{v2}\right)$である．これより，$R_t \to \infty$で $f_{v2} = 1$となるため，モデル定数C_{v1}を$C_{v1} < 8/3$と取れば，右辺の括弧内が負とならないことが保証される．また，壁近傍では，$3C_{v1}f_{v2}/8 \cong 3C_{v1}\left(\sqrt{R_t}/C_{v2}\right)/8$が成立し，式(9)との関係から$C_v = C_{v1}/C_{v2}$となる．式(6)に，DNS データベース[15]の値を代入して得られたC_vを参考に，各種流れ場における数値最適化を基にモデル定数を$C_{v1} = 0.4$，$C_{v2} = 2\times10^3$と決定した．他のモデル関数，モデル定数は NLAKN モデル[11]とすべて同じとした．

式(10)は壁面近くで平均せん断による時間スケールが小さくなることから，τ_{Rw}はその釣合いから壁面垂直方向応力を抑制する働きをし，応力方程式モデルの再分配項における壁面影響項(wall reflection term)と同様の役割を果たすことが分かるが，DNS データベースを用いて

改良した非線形モデルの評価を次に行う．

図 3 に再構築した乱流モデルの DNS データベースによる評価を示す．図 3(a)より，壁面近傍における乱れの非等方性，レイノルズせん断応力をよく再現していることが分かり，本研究で提案したモデルがよく機能している．また，壁面漸近挙動も正確に再現されていることが図 3 (b)より確認される．本モデルの大きな特徴は，モデル化した時間スケール τ_{Rw} 中に方向を決定する単位テンソル等を含まずに壁面垂直方向応力の壁面漸近挙動を満たしている点にある．これは，式(2)において，壁面垂直方向応力の漸近値を満たした時にのみ，その乱れ成分が x_2^4 となるようにモデル化されているためである．このことは，例えば 2 次元コーナー周りの流れ等を解析する場合に，壁面影響関数を考慮するだけで壁面漸近挙動が決定されるため，計算の複雑さが緩和されると思われる．本モデルは DNS の結果を定量的にもよく表現し，2 次非線形モデルにおいても予測性能の向上が図られた結果となり，計算負荷の観点からも非常に有益であろう．

2.3　DNS による乱流モデルの総合的評価

さて，乱流のモデリングにおける DNS の持つもう一つの重要な役割は，構築された乱流モデルの性能を評価することである．先にも述べたように，このような作業は，DNS だけではなく装置実験から得られたデータを用いてもよく行われている．DNS を用いた乱流モデル評価の最大の利点は，装置実験から得ることの困難な高次乱流諸量との比較・評価を，より正確に行えることである．特に，壁乱流を扱う乱流モデルでは，壁面摩擦係数や熱伝達率など工学的に重要な情報を高精度に得ることが極めて重要であり，そのためにも，壁近傍における高次統計量の挙動を正確に把握することはモデルの開発において必要かつ不可欠である．それ故，現在の乱流モデリングにおける DNS の存在は，以前に増して大きな意味を有している．

DNS を用いた乱流モデルの評価方法としては，次の２通りの方法が挙げられる．

(1) 一つのモデル方程式に，未知数以外のものは DNS データを真値として与え，これを解く方法.

(2) 構築された乱流モデル一式を解析対象場の初期条件，境界条件の下で解き，得られた結果を DNS と比較する．

(1)の評価法として，温度乱れ散逸 ε_θ -方程式に対するモデル評価[6]を以下に示す．乱流伝熱を解析するための温度場 2 方程式モデルは，Nagano-Kim[18]以来，最近かなり精緻なものとなってきている[19,20]．温度場 2 方程式モデルは，いわゆる乱流プラントル数 Pr_t を定義することなく温度場乱流諸量を求めるもので，乱流熱伝達を解析するにあたって非常に有効なモデルの一つである．しかし，それに組み込む温度乱れの散逸率に対するモデル方程式はかなり複雑であるために，DNS データベースに基づいてその評価をしておくことは，乱流モデルの普遍性を高める上で特に重要である．

さて，厳密な ε_θ -方程式は次式で与えられる[18].

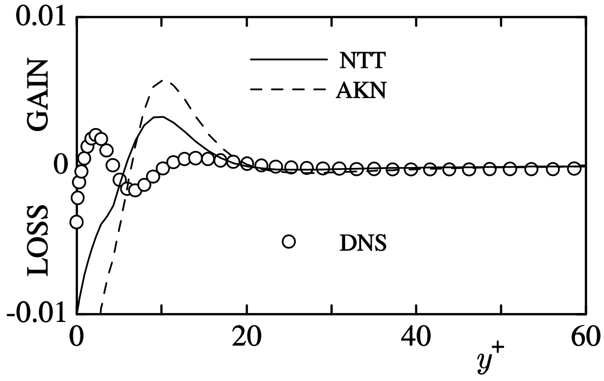


Fig. 4 Budgets of modeled ε_θ-equations

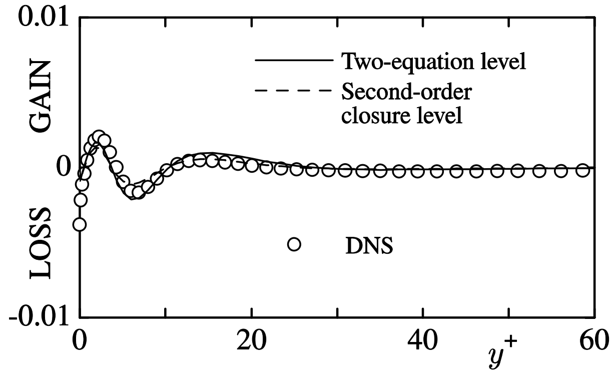


Fig.5 Budgets of new ε_θ-equations

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = P^1_{\varepsilon_\theta} + P^2_{\varepsilon_\theta} + P^3_{\varepsilon_\theta} + P^4_{\varepsilon_\theta} + T_{\varepsilon_\theta} + D_{\varepsilon_\theta} - \gamma_{\varepsilon_\theta} \tag{11}$$

ここで，$P^1_{\varepsilon_\theta} \sim P^4_{\varepsilon_\theta}$ は生成項，T_{ε_θ} は乱流拡散項，D_{ε_θ} は分子拡散項，$\gamma_{\varepsilon_\theta}$ は消滅項をそれぞれ表し，次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
&P^1_{\varepsilon_\theta} = -2\alpha \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \qquad P^2_{\varepsilon_\theta} = -2\alpha \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} \\
&P^3_{\varepsilon_\theta} = -2\alpha \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad P^4_{\varepsilon_\theta} = -2\alpha \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \\
&T_{\varepsilon_\theta} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}}\right), \quad D_{\varepsilon_\theta} = \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_j \partial x_j} \\
&\gamma_{\varepsilon_\theta} = -2\alpha^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

よく知られたように，上式をモデル化した ε_θ-方程式は，一般に次式のように書かれる．

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_j \partial x_j} + T_{\varepsilon_\theta} + C_{P1} f_{P1} \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta + C_{P2} f_{P2} \frac{\varepsilon_\theta}{k} P_k - C_{D1} f_{D1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{k_\theta} - C_{D2} f_{D2} \frac{\varepsilon_\theta \varepsilon}{k} + \text{Additional term} \tag{13}$$

ここで，D/Dt は実質微分を表す．乱流拡散項 T_{ε_θ} は，通常次式で与えられる．

$$T_{\varepsilon_\theta} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\alpha_t}{\sigma_\phi}\dfrac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j}\right) & : \text{two}-\text{equation level} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(C_s f_R \dfrac{k}{\varepsilon}\overline{u_i u_j}\dfrac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_i}\right) & : \text{second-order closure level} \end{cases} \tag{14}$$

ここで，$\alpha_t = -\overline{u_j \theta}\big/\left(\partial \Theta / \partial x_j\right) = C_\lambda\ f_\lambda k \tau_m$ は熱の渦拡散係数である．式(13)中の付加項は，様々

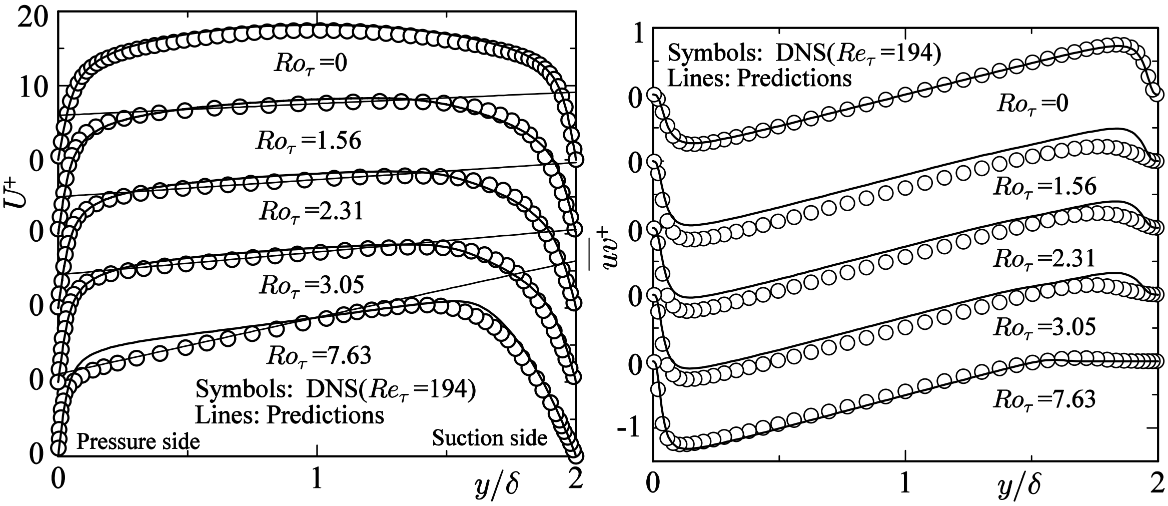


Fig.6 Predicted mean velocity and Reynolds shear stress in rotating channel flow.

なモデルが提案されている[6]. モデルの評価法は，上述したように，ε_θ-方程式においてε_θのみを未知数として，他は DNS データを与え解を求める[6]．そして，求まった解ε_θを DNS の値(真値)と比較する．解析対象場は，Kasagi ら[21]による壁面熱流束が一定に保たれた加熱平行平板間流れの DNS($\mathrm{Re}_\tau = 150, \mathrm{Pr} = 0.71$)である．評価の対象とした$\varepsilon_\theta$-方程式は，壁面乱流に適応可能な Nagano ら [22] (NTT)，Abe ら[19] (AKN)のモデルである．

図 4 に，モデル化したε_θ-方程式から得られる分子拡散D_{ε_θ}を除いた全体の収支と，DNS のD_{ε_θ}を除く全項($P^1_{\varepsilon_\theta} + P^2_{\varepsilon_\theta} + P^3_{\varepsilon_\theta} + P^4_{\varepsilon_\theta} + T_{\varepsilon_\theta} - \gamma_{\varepsilon_\theta}$)との比較を示した．図から分かるように，モデル方程式が与える収支は，全般に壁近傍で DNS のそれと全く合っていない．これらのモデルは，DNS データベースが完備していない時代に開発されたものであるから，この結果をもってモデル構成全体に不備があるというのは言い過ぎであろう．しかし，何らかの対策が必要なのは明らかである．例えば，式(11)の$P^3_{\varepsilon_\theta}$項は通常付加項として扱われ，NTT，ANK モデルではそのオーダを考え無視されている項である．しかし，$P^1_{\varepsilon_\theta} + P^2_{\varepsilon_\theta} + P^4_{\varepsilon_\theta} + T_{\varepsilon_\theta} - \gamma_{\varepsilon_\theta}$と比べると同程度のオーダとなるのが DNS より確認されたために，厳密にモデル化を進める上ではこの項の寄与も無視できない．これらの項もモデル化し，且つ乱流拡散項にも DNS データから得られる知見を反映した最近の Hattori-Nagano モデル[6]における新ε_θ-方程式は，図 5 と 4 を比べて明らかなように，粘性底層から対数領域にかけて DNS との定性的かつ定量的な一致を与えている．特に粘性底層での一致は，乱流拡散項に対する新たなモデル化によるものである．また，収支の全体的な一致は，支配方程式中の各項を DNS と同じオーダでバランスさせるようにモデル化したための帰結である．

次に，評価法(2)により，前節で提案した非線形モデルを総合的に$k-\varepsilon$モデルとして構築したモデル[7]を評価することにする．これは最も一般的な乱流モデル評価法であり，従来の乱流モデル構築でもよく用いられてきた．図 6 は，Nagano-Hattori[7]の提案した速度場 2 方程式乱流モデルを用いて，回転チャネル流れを予測した結果を表す．図 6 は平均速度とレイノルズせん断応力の分布を DNS の結果[23]と共に表している．Nagano-Hattori[7]が行ったモデリングでは，まずチャネル流れの DNS を用いて(1)の方法に基づき散逸方程式が構築・評価され，次に前述のアプリオリ法を通してk方程式とレイノルズ応力表現式のモデル化が行われている．図 6 の回転チャネルの予測結果では，様々な回転数において平均速度，レイノルズせん断応力を良く予測していることが分かる．このように，DNS はパラメータを振ったデータも容易に与えるため，乱流モデル中のモデル定数やモデル関数を広い範囲に亘って評価することも可能である．しかしながら，用いる乱流モデルに含まれる固有の問題を予め十分に把握しておかないと，間違った方向に問題を解釈し，更に DNS を用いてモデル定数とモデル関数の再最適化を行うことにもなりかねない．乱流のモデリングにおいて，留意すべき事柄の一つである[24].

3　おわりに

DNS データを用い，乱流モデルの構築を行う最近の手法を示した．速度場，温度場，低次，高次完結モデルを問わず，DNS を用いて構築される最近の乱流モデルの予測精度は，実験データに基づいて構築されてきた過去の乱流モデルに比べて，格段に向上している．すなわち，DNS データを用いた様々な乱流モデル構築法や評価法が考案され，個々の素過程に基づくモデリングが可能となるに至り，より高精度かつ普遍的な乱流モデル構築への道が拓かれつつある．また先に述べたように，最近では DNS データそのものをインターネット上で容易に入手することが可能となり，DNS を用いた乱流モデリングがますます盛んになることは疑いの余地がない．その為にも，引き続き DNS データベースの充実を図らなければならない．

参考文献

[1] W. Rodi and N. N. Mansour, “Low Reynolds number $k-\varepsilon$ modelling with the aid of direct simulation data,” J. Fluid Mech., Vol. 250, (1993), pp. 509-529.

[2] Y. Nagano and M. Shimada, “Rigorous Modeling of Dissipation-Rate Equation Using Direct Simulations,” JSME Int. Journal, Ser.B, Vol.38, No.1, (1995,), pp. 51-59.

[3] H. S. Dol, K. Hanjalić and S. Kenjereš, “A comparative assessment of the second-moment differential and algebraic models in turbulent natural convection,” J. Heat and Fluid Flow, Vol. 18 (1997). pp.4-14.

[4] Y. Nagano and M. Shimada, “development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers,” Phys. Fluids, Vol. 8, No. 12, (1996), pp. 3379-3402.

[5] Y. Nagano, M. Kondoh and M. Shimada, “Multiple-time-scale turbulence model for wall and homogeneous shear flows based on direct numerical simulations,” Int. J. Heat and

Fluid Flow, Vol. 18, No. 4, (1997), pp. 346-359.

[6] H. Hattori and Y. Nagano, "Rigorous formulation of two-equation heat-transfer model of turbulence using direct simulations," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.33, (1998), pp. 153-180.

[7] Y. Nagano and H. Hattori, "An improved turbulence model for rotating shear flows," Journal of Turbulence, Institute of Physics, Vol.3-006, (2002), pp.1-13.

[8] Y. Nagano and H. Hattori, "DNS and Modelling of spanwise rotating channel flow with heat transfer," Journal of Turbulence, Institute of Physics, Vol.4-010, (2003), pp.1-15.

[9] W. Rodi, "A new algebraic relation for calculating the Reynolds stress," ZAMM, Vol. 56, (1976), pp. 19-221.

[10] H. K. Myong and N. Kasagi, "A new approach to the improvement of $k-\varepsilon$ turbulence model for wall-bounded shear flows," JSME Int. J.: Ser. B, Vol. 33, (1990), pp. 63-72.

[11] K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano, "On Reynolds-stress expressions and near-wall scaling parameters for predicting wall and homogeneous turbulent shear flows," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 18, (1997), pp. 266-282.

[12] T. J. Craft, B. E. Launder and K. Suga, "Prediction of turbulent transitional phenomena with a nonlinear eddy-viscosity model," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 18, (1997), pp. 15-28.

[13] D. D. Apsley and M. A. Leschziner, "A new low-Reynolds-number nonlinear two-equation turbulence model for complex flows," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 19, (1998), pp. 209-222.

[14] K. Suga and K. Abe, "Nonlinear eddy viscosity modelling for turbulence and heat transfer near wall and shear-free boundaries," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 21, (2000), pp. 37-48.

[15] R. D. Moser, J. Kim and N. N. Mansour, "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $\mathrm{Re}_\tau = 590$," Physics Fluids, Vol. 11, (1999), pp. 943-945.

[16] Y. Nagano and M. Tagawa, "An improved $k-\varepsilon$ model for boundary layer flows," J. Fluids Engineering, Vol. 112, (1990), pp. 33-39.

[17] T.-H. Shih, A. Shabbir and , J. L. Lumley, "Realizability in second moment turbulence closure revisited," NASA Technical Memorandum, 106469, (1994).

[18] Y. Nagano and C. Kim, "A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows," Trans. ASME J. Heat Transfer, Vol. 110, (1988), pp. 583-589.

[19] K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano, "A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows -II. thermal field calculations," Int. J. Heat Mass Transfer, Vo. 38, (1995), pp. 1467-1481.

[20] Y. Nagano and M. Shimada, "Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulation of turbulent flows with different Prandtl numbers," Phys. Fluids, Vol. 8, (1996), pp. 3379-3402.

[21] N. Kasagi, Y. Tomita and A. Kuroda, "Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow," Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 114, (1992), pp. 598-606.

[22] Y. Nagano, M. Tagawa and T. Tsuji, "An improved two-equation heat transfer model for wall

turbulent shear flows," Proc. ASME/JSME Thermal Engng. Joint Conference, Vol. 3, (1991), pp.233-240, Reno, USA.

[23] R. Kristoffersen and H. Andersson, "Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel," J. Fluid Mech., Vol. 256, (1993), pp. 63-197.

[24] Y. Nagano, "Modelling heat transfer in near-wall flows," Closure strategies for turbulent and transitional flows (B. Launder and N. Sandham eds.), Cambridge university press, (2002), pp. 188-247.