

## RANS モデルによる工学問題への対応

## RANS Turbulence Modeling for Engineering Applications

須賀一彦\*

\*株式会社豊田中央研究所

Kazuhiko Suga

\*Toyota Central R &amp; D Labs., Inc.

E-mail:k-suga@mosk.tytlabs.co.jp

## 1 はじめに

乱流を数値解析する手法は RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation), LES (Large Eddy Simulation), DNS (Direct Numerical Simulation) に大きく分類され, その中で現在を含めてこれまでに最も工学的に広く活用されてきているのは, RANS をベースにした手法であることは周知のとおりである. しかし, 計算機のさらなる発展とともに, 将来は工学設計の現場でもより計算負荷の高い LES の比重が高まっていくのは必定とみられている. では, RANS の役目は終わるかというとは決してそんなことはなく, LES 等と相互に補い合っただけで確実に共存していくはずである. なぜなら, 工学設計ではアンサンブル平均量が必要とされることが大半で, 短時間で経済的にこの予測ができる RANS の需要がなくなるとは考えられないからである.

現在用いられている RANS 乱流モデルは渦粘性モデル (Eddy Viscosity Model: EVM), レイノルズ応力方程式モデル (Reynolds Stress Transport Model, または Second Moment Closure: SMC) に大別できる. EVM と SMC のどちらもナビエ・ストークス方程式をアンサンブル平均して得られる式 ( : レイノルズ方程式) に現れる, レイノルズ応力と呼ばれる 2 次モーメント量  $\overline{u_i u_j}$  を扱うモデルである. しかし, 後者はレイノルズ応力の輸送方程式をモデル化して直接解くのに対し, 前者はレイノルズ応力と平均ひずみ速度との間に関係式を仮定して代数的にレイノルズ応力を取り扱う. したがって, SMC の方が原理的により高精度な予測ができるが数値的に不安定な傾向にあり, 三次元では六つのテンソル量の輸送方程式を数値的に工夫しながら解かねばならない. そのため, 予測精度が不十分であっても, より簡便で計算コストの低い  $k-\varepsilon$  線型 EVM が広く実用工学計算に応用されているのが現状である.

しかし, 標準的な  $k-\varepsilon$  線型 EVM では衝突流れ, 曲がり管流れ, 剥離流れ等で満足な予測解が望めないことがわかっており, その欠点を改良するためにモデル式を高次非線型化する非線型 EVM の研究が近年成果をあげている. いっぽう, 従来の SMC の数値的不安定性の原因はモデル式に物理的または数学的に不整合な部分があるため, そういったことがおきかない (Realizable な) SMC の研究も進んでいる. したがって本稿では筆者が携わったこれらの新しい試みを最近の応用例とともに示し, モデルの有効性や優劣について紹介する.

原稿受理 2003 年 5 月 19 日

## 2 流れ場のモデル

### 2.1 三次非線型渦粘性モデル

渦粘性モデルにおける応力-ひずみ関係式は、渦粘性係数  $\nu_t$  を用いて一般に

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \cdot k - \nu_t \cdot S_{ij} + Hot_{ij} \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $Hot_{ij}$  は非線型モデルに現れる高次項である。この式(1)は、SMC を局所平衡下で簡略化し、代数式化した式と数学的に同等であるため、それに近い流れ場では SMC と同等のポテンシャルがある。 $Hot_{ij}$  は平均ひずみ速度テンソル  $S_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i$  と渦度テンソル  $\Omega_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j - \partial U_j / \partial x_i$  の積からなるが、筆者らの三次非線型モデルにおける  $Hot_{ij}$  は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Hot_{ij} = & c_1 \nu_t \tau (S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) + c_2 \nu_t \tau (\Omega_{ik} S_{ij} + \Omega_{jk} S_{ki}) + c_3 \nu_t \tau (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl}) \\ & + c_4 \nu_t \tau^2 (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li}) S_{kl} + c_5 \nu_t \tau^2 (\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij}) \\ & + c_6 \nu_t \tau^2 S_{kl} S_{kl} S_{ij} + c_7 \nu_t \tau^2 \Omega_{kl} \Omega_{kl} S_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\tau$  は乱流時間スケールである。この三次非線型渦粘性モデルは、レイノルズ応力の非等方性はもとより流線曲がり流れ、旋回流れ、衝突流れ及び層流-乱流遷移流れの予測を大きく改善する[1, 2]。筆者らはこれを  $k-\varepsilon$  二方程式モデルに組み込んだもの[1]や、 $A_2$  または  $A$  ( $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$ ,  $A_2 = a_{ij} a_{ji}$ ,  $A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}$ ,  $a_{ij} = \overline{u_i u_j} / k - 2\delta_{ij} / 3$ ) といった応力の不変量の輸送方程式を追加した三方程式モデル ( $k-\varepsilon-A_2$  [2],  $k-\varepsilon-A$  [3]) を提案してきたが、性能上の大きな違いは前者が壁面近傍等に生じる強い非等方乱流を十分に再現しないのに対し、後者は  $A_2$  や  $A$  の依存度やその輸送効果を用いることで多くの流れ場で精度を改善していることにある。

### 2.2 TCL レイノルズ応力方程式モデル

レイノルズ応力の輸送方程式は、次のように書ける。

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = d_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

ここで、 $d_{ij}$ ,  $P_{ij}$ ,  $\phi_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  はそれぞれ、拡散項、生成項、圧力-ひずみ相関項、散逸項であり、 $P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \partial U_j / \partial x_k - \overline{u_j u_k} \partial U_i / \partial x_k$  以外はモデル化の必要がある。この中で  $\phi_{ij}$  のモデル化が SMC の最大の課題とされ、多くの研究がなされてきた。近年、UMIST の Launder らのグループは次式(4)の Realizable な三次の圧力-ひずみ相関モデルからなる SMC を低 Re 数モデルに拡張し、壁からの距離等の幾何形状変数に頼らないモデル[4]を提案した。これは壁面だけでなく自由表面近傍の二成分乱流極限(Two Component turbulence Limit: TCL)においても、レイノルズ応力が実現性条件を満たすことが確認されており TCL モデルと呼ばれる。

$$\phi_{ij} = -c_1 \varepsilon \left\{ a_{ij} + c'_1 \left( a_{ik} a_{jk} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right\} - \sqrt{A \varepsilon} a_{ij}$$

$$\begin{aligned}
& -0.6 \left( P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \\
& + 0.3 a_{ij} P_{kk} - 0.2 \left\{ \frac{\overline{u_j u_k} \overline{u_i u_l}}{k} S_{kl} - \frac{\overline{u_k u_l}}{k} \left( \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) \right\} \\
& - c_2 \left\{ A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn}) \right\} \\
& + c'_2 \left[ \left( \frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) \left( P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) + 0.1 \left\{ a_{ij} - \frac{1}{2} \left( a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_2 \right) \right\} P_{kk} \right. \\
& \quad \left. - 0.05 a_{ij} a_{kl} P_{kl} + 0.1 \left\{ \left( \frac{\overline{u_i u_m}}{k} P_{jm} + \frac{\overline{u_j u_m}}{k} P_{im} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{u_l u_m}}{k} P_{lm} \right\} \right. \\
& \quad \left. + 0.1 \left( \frac{\overline{u_j u_k} \overline{u_i u_l}}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{u_l u_m} \overline{u_k u_m}}{k^2} \right) (6 D_{kl} + 13 k S_{kl}) + 0.2 (D_{kl} - P_{kl}) \frac{\overline{u_j u_k} \overline{u_i u_l}}{k^2} \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

ここで  $D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \partial U_k / \partial x_j - \overline{u_j u_k} \partial U_k / \partial x_i$  である。

### 3 温度場のモデル

#### 3.1 HOGGDH 熱流束モデル

乱流熱輸送問題を RANS モデルで取り扱う場合、最もよく応用されるのが次式(5)の乱流プラントル数  $Pr_t$  を用いて乱流熱流束  $\overline{u_i \theta}$  を平均温度こう配  $\partial \Theta / \partial x_i$  の関数とするモデルである。

$$\overline{u_i \theta} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (5)$$

しかし、非線型 EVM や SMC 等で乱れの非等方性が予測できる場合には一般化こう配拡散モデル(GGDH)がしばしば用いられる。

$$\overline{u_i \theta} = -c_\theta \tau \overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \quad (6)$$

筆者らはこの GGDH 熱流束モデルの精度を向上させるため、高次項を加えた高次 GGDH (HOGGDH) 熱流束モデルを提案している[3]。

$$\overline{u_i \theta} = -c_\theta k \tau (\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \quad \sigma_{ij} = c_{\sigma 1} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} + c_{\sigma 2} \frac{\overline{u_i u_l} \overline{u_l u_j}}{k^2}, \quad \alpha_{ij} = c_{\alpha 1} \tau \left( \Omega_{il} \frac{\overline{u_l u_j}}{k} + \Omega_{li} \frac{\overline{u_j u_l}}{k} \right) \quad (7)$$

このモデルは流れ方向の熱流束成分の予測精度を大きく向上させるため、結果的に複雑な乱れ場における熱伝達の予測精度も改善する[6]。

### 4 応用計算例

#### 4.1 三次非線型渦粘性モデルの応用計算

図 1 はエンジン吸気流れを三次非線型の  $k-\varepsilon$ ,  $k-\varepsilon-A_2$  モデルと線型  $k-\varepsilon$  の Launder-Sharma (LS) モデルで計算し、ガス流量係数  $C_f$  への吸気ポート曲率  $R/D$  の影響を比較したも

のである。三次非線型項が流線曲がりに対する感度を有するので、三次非線型モデルはいずれも LS モデルの予測を大きく改善する。中でも  $k-\varepsilon-A_2$  モデルの結果がより良く実験と対応している [5]。

図 2 は車両空力模型の空力抵抗係数  $C_D$  が後部傾斜角度の増加に伴う剥離流れの変化のため、急変する様子を比較したものである。明らかに  $k-\varepsilon-A_2$  モデルは LS モデルより優れて実験の傾向をとらえている [5]。また、図 3 にも示すような実機形状周りの圧力係数  $C_p$  も  $k-\varepsilon-A_2$  モデルは正しく実験を再現する。

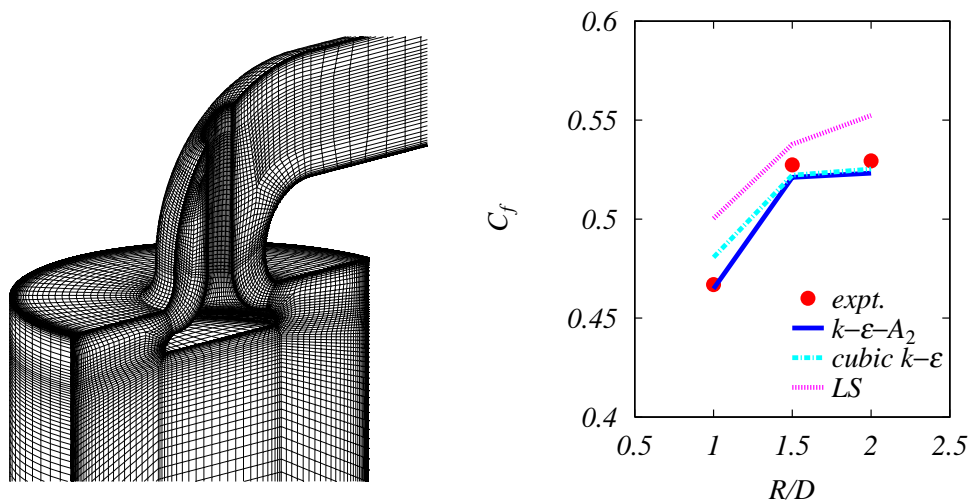


Fig.1 Computational grid and discharge coefficient of IC engine port-cylinder flow at  $Re=91000$ .

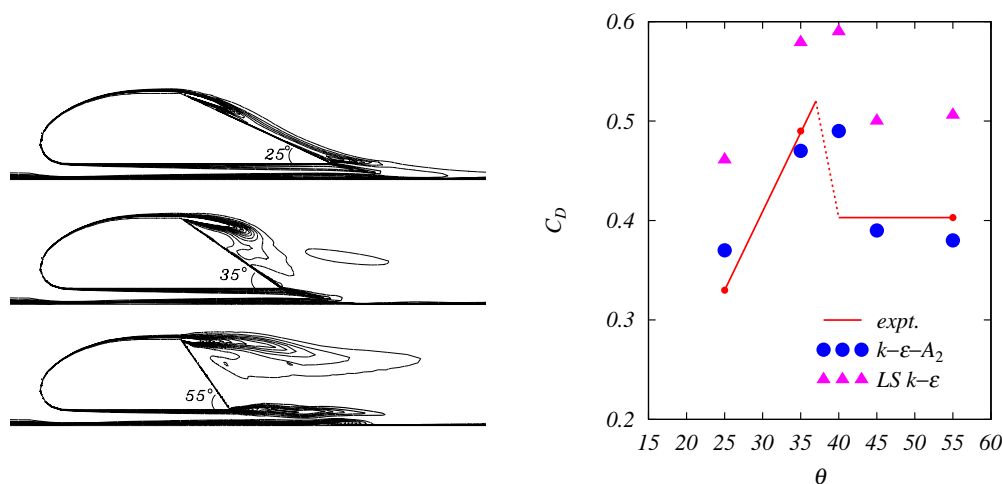


Fig.2 Vorticity and drag coefficient around aerodynamic bluff bodies at  $Re=440000$ .

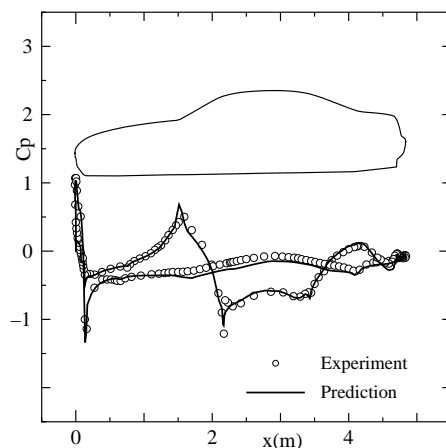
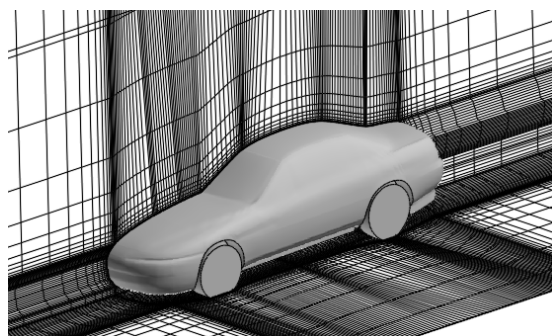


Fig.3 Computational grid and pressure coefficient around a passenger car.

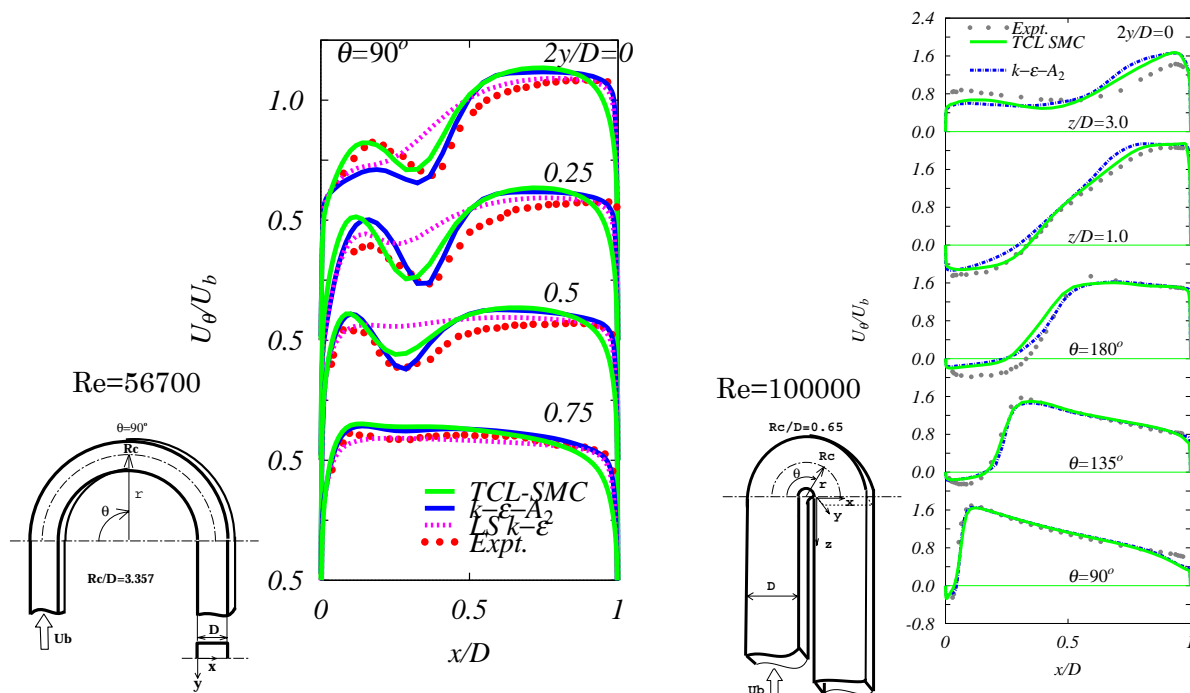


Fig.4 Mean velocity distribution in square-sectioned U-bend ducts.

#### 4.2 TCL レイノルズ応力方程式モデルの応用計算

図 4 は曲率  $Rc/D=3.36$  と  $Rc/D=0.65$  の 2 種類の矩形断面曲がり管内の平均流速分布を TCL モデルと非線型渦粘性モデルで比較したものである。  $Rc/D=3.36$  の管の流速分布は二次流れのために曲がり部で図のように大きな凹みを持つ。しかし、LS モデルがほとんどこの特性を再現できないのに対し、  $k-\epsilon-A_2$  モデルや TCL SMC はどちらもほぼ正確に実験値を再現している [5, 6]。曲がり部内壁に沿って剥離が起こる  $Rc/D=0.65$  の管でも結果は満足で、平均速度を見る限り、TCL モデルと非線型渦粘性  $k-\epsilon-A_2$  モデルはどちらも十分な予測精度を持ち、互いに遜色がない。(従来の EVM や SMC を用いた報告ではここまでの精度で解析されていない。)しかし、詳細に検討すると局所平衡から大きく外れた乱れ場では、当然ながら TCL モデ

ルの方がより優れて乱れ量の予測ができる．そのため，次節に示すような正確なレイノルズ応力の分布が必要な伝熱モデルと組み合わせるには，TCL モデルの方がやはり優れている．

### 4.3 HOGGDH 熱流束モデルの応用計算

図 5 は  $Pr=0.71$  のチャンネル流れに於いて HOGGDH 熱流束モデルとその他のモデルによる熱流束の流れ方向成分を比較したものである [3]．明らかに HOGGDH が優れていることが示されているが，良く知られているように発達した壁乱流では熱流束の流れ方向成分は重要でない．しかし，図 6 に示す  $Re/D=3.36$  の矩形断面曲がり管で HOGGDH が GGDH より優れて局所  $Nu$  数を予測できることが示されることから，複雑な流れ場では HOGGDH 熱流束モデルが優れた性能を持つことがわかる [7]．

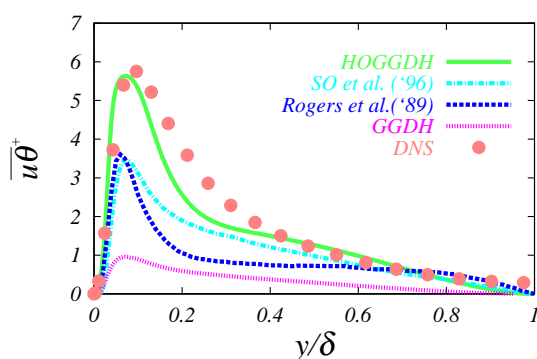


Fig.5 Streamwise turbulent heat flux in a channel flow at  $Re_{\tau}=180$ .

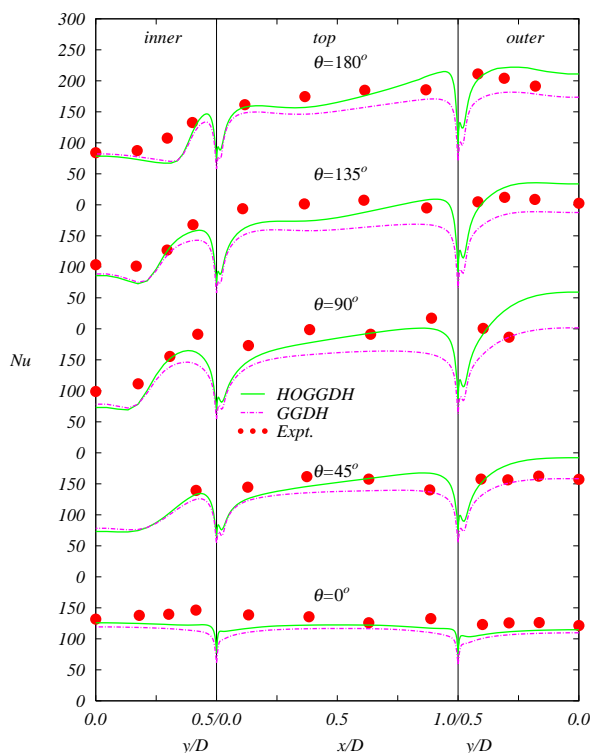


Fig.6 Nusselt number distribution in the U-bend duct at  $Re/D=3.36$ .

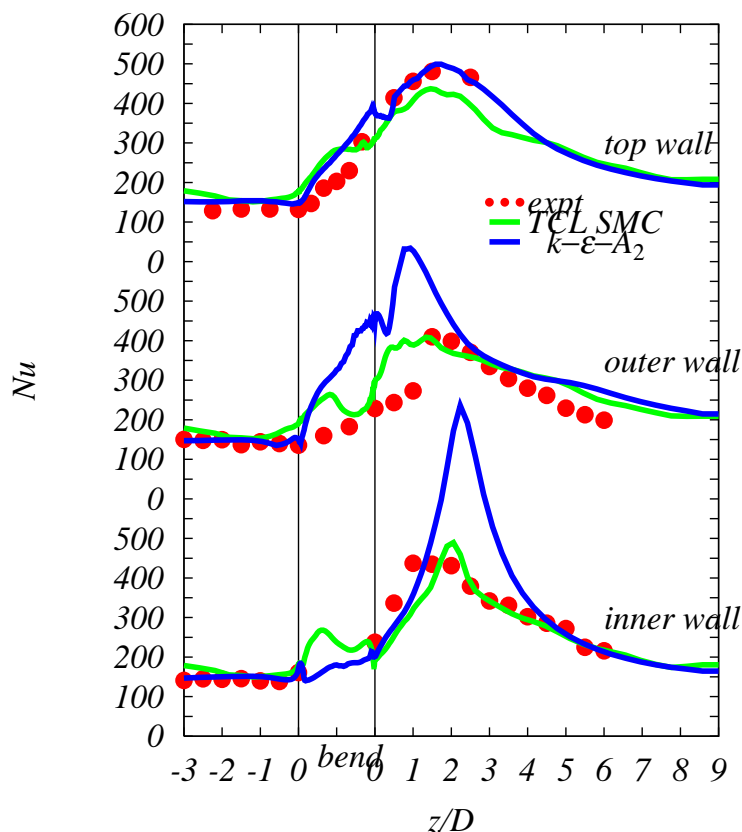


Fig.7 Nusselt number distribution in the U-bend duct at  $Rc/D=0.65$ .

図 7 は強い曲率を持つ  $Rc/D=0.65$  の曲がり管に於いて、HOGGDH 熱流束モデルを非線型 EVM と TCL SMC に組み合わせた場合の Nu 数分布を比較するものである[8]。この場合は、前述のように内壁に沿って複雑な循環流が形成されることから、乱れ場はより複雑になり伝熱場もそれによって大きく影響を受ける。図に示すように  $k-\varepsilon-A_2$  モデルは特に内外壁に沿った平均 Nu 数を著しく過剰予測してしまうが、TCL SMC はほぼ現実的なレベルの熱伝達係数を予測できる。HOGGDH 熱流束モデルはレイノルズ応力の予測精度に敏感であるため、このような乱れ場はレイノルズ応力の輸送式を直接解く TCL SMC の優位性が顕著に表れる例である。

## 5 まとめ

三次非線型 EVM は三次元の複雑な工学的流れ場においても標準線型  $k-\varepsilon$  モデルより大幅に改善した結果を与える。その精度は多くの場合 Realizable な TCL SMC に匹敵するが、壁面近傍の乱れ構造が著しく複雑になるような流れ場においては、残念ながらレイノルズ応力の代数近似の限界から TCL SMC の信頼性には及ばない。

また、HOGGDH 熱流束モデルは流れ方向熱流束の予測を大幅に改善することから、複雑な流動場に於ける壁面熱伝達率の予測を向上させる。

なお、本稿に紹介した三次元応用計算において、同じ初期値から収束解にいたるまでに要

した CPU 時間のモデルによる比率は, 1(線型  $k-\varepsilon$  EVM):1.3( $k-\varepsilon$  三次非線型 EVM):2( $k-\varepsilon-A_2$ ):4.5 (TCL SMC) であり, HOGGDH は通常の手法とほぼ同等の計算時間を要したことを付記しておく.

### 参考文献

- [1] Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., "Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence", Int. J. Heat Fluid Flow, 17, (1996), 108-115
- [2] Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., "Prediction of turbulent transitional phenomena with a nonlinear eddy-viscosity model", Int. J. Heat Fluid Flow, 18, (1997), 15-28
- [3] Suga, K. and Abe, K., "Nonlinear eddy viscosity modelling for turbulence and heat transfer near wall and shear-free boundaries", Int. J. Heat Fluid Flow, 21, (2000), 37-48
- [4] Craft, T.J., and Launder, B.E., "A Reynolds-stress closure designed for complex geometries", Int. J. Heat Fluid Flow, 17, (1996), 245-254
- [5] Suga, K., ・他, "Application of a three-equation cubic eddy viscosity model to 3-D turbulent flows by the unstructured grid method", Int. J. Heat Fluid Flow, 22, (2001), 259-271
- [6] Suga, K., "Predicting turbulence and heat transfer in 3-D curved ducts by near-wall second moment closures", Int. J. Heat Mass Transfer, 46, (2003), 161-173
- [7] Suga, K., Nagaoka, M., and Horinouchi, N., "Application of a higher order GGDH heat flux model to three-dimensional turbulent U-bend duct heat transfer", ASME J. Heat Transfer, 125, (2003), 200-203
- [8] 須賀一彦, "低 Re 応力方程式モデルの三次元 U 字管内乱流熱伝達場での性能", 機論, 68-675, B(2002), 3093-3100